Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Ипатова В.М.

Методические указания по решению задач экзаменационной контрольной работы по курсу Дифференциальные уравнения 2013-2014 уч. г.

Долгопрудный
2014

Содержание

Предисловие

В данном методическом пособии представлена письменная экзаменационная работа по годовому курсу «Дифференциальные уравнения», которая давалась в Московском физико-техническом институте в весеннем семестре 2014 года. Контрольная работа составлена в четырёх вариантах. В пособии содержатся условия всех экзаменационных задач и ответы к ним. По каждой теме письменного экзамена разъясняются основные методы, необходимые для решения задач, даются рекомендации по выбору способов решения. В качестве примера детально разбираются задачи двух вариантов (41 и 42) контрольной работы. Маркировка вида: задача 42-5 означает задачу № 5 из варианта 42. Порядок следования тем согласован с расположением задач в экзаменационной работе:

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
2. Линейные однородные системы третьего порядка с постоянными коэффициентами.
3. Положения равновесия нормальных автономных систем второго порядка.
4. Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.
5. Исследование функционала экстремум (простейшая задача вариационного исчисления).
6. Задача Коши для уравнений, допускающих понижение порядка.
7. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Особые решения.
8. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.
9. Задачи повышенного уровня.

На выполнение экзаменационной работы отводилось 4 часа.

Авторами задач, включенных в письменную экзаменационную работу, являются сотрудники кафедры высшей математики МФТИ: С.С. Самарова (№ 1), И.Ю. Ждановский (№ 2), А.Е. Умнов (№ 3), В.М. Ипатова (№ 4,8,9), А.Ю. Петрович (№ 5), С.В. Иванова (№ 6), А.Ю. Семенов (№ 7), А.М. Бишаев (№ 10). Автор данного пособия была составителем письменной экзаменационной работы и выражает свою искреннюю благодарность коллегам, написавшим для контрольной новые оригинальные задачи.

Кроме того, автор считает своим приятным долгом поблагодарить О.А. Пыркову, которая внимательно прочла пособие и высказала ряд полезных замечаний.

Условия задач

Вариант 41 (2013-2014 уч.г.)

1.(5) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} - 8y'' - 9y = 5\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 - 4e^{-x}.$$

2.(4) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y - 3z, \\ \dot{y} = 2x - 4y - 2z, \\ \dot{z} = 2x - 3y - 4z. \end{cases} \qquad (\lambda_{1,2} = -2,\ \lambda_3 = -3)$$

3.(4) Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(1 - 2x - y), \\ \dot{y} = 2x - x^2 + y. \end{cases}$$

4.(5) Найти все решения уравнения

$$x^2(x+2)^2 y'' - x(x^2-4)y' + x(x-2)y = 5(x+2)^3 \ln^3 x.$$

5.(5) Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y) = \int\limits_{7\pi/4}^{11\pi/6} (y')^2 \operatorname{tg} x\, dx, \quad y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ln 2, \quad y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2\ln 2.$$

6.(5) Решить задачу Коши

$$\left(x^2 - 2x\right)yy'' + \left(3x-4\right)yy' - x\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(y'\right)^2 = 0, \quad y(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y'(3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

7.(5) Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$3\left(y'\right)^4 + 4\left[(y')^3 + y + x\right] = 0.$$

8.(5) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \left[x(y-5z)^2 + z\right]\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{5}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u = xz^5 \text{ при } y = 5z + 1,\ x > 0.$$

Повышенный уровень

9.(7) Доказать, что при всех $A, B, C \in \mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно

$$(x+1)y''' - y'\sin x = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) - 3y'(0) = A, \quad y(1) = B, \quad y'(1) = C.$$

10.(5) Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x} = u, \quad \dot{r} = v, \quad \dot{u} = v - 2x, \quad \dot{v} = -u - 1 + \frac{w(w+1)}{r + 3w^2}, \quad \dot{w} = -\frac{v(w+1)}{r + 3w^2}.$$

Вариант 42 (2013-2014 уч.г.)

1.(5) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}-2y'''+2y''=\left(6x-e^{x}\right)^{2}.$$

2.(4) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=6x-4y+10z,\\ \dot{y}=14x-12y+27z, \qquad (\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=\pm 2i)\\ \dot{z}=4x-4y+8z.\end{cases}$$

3.(4) Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+2y-xy,\\ \dot{y}=\ln\left(1+4x-3y-xy\right).\end{cases}$$

4.(5) Найти все решения уравнения

$$x^{2}y''-x(8x-1)y'+4x(4x-1)y=(4-x)e^{4x}, \quad x>0.$$

5.(5) Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int_{4\pi/3}^{3\pi/2}\left(y'\right)^{2}\sin x\,dx, \quad y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\ln 3, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$

6.(5) Решить задачу Коши

$$2\left(y+2\right)y''+\left(2y-1\right)\left(y'\right)^{4}=\left(y'\right)^{2}, \quad y\left(5\right)=7,\ y'\left(5\right)=\frac{1}{2}.$$

7.(5) Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$2y'-2\ln y'+y-x=0.$$

8.(5) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$\left(2xy^{2}-7xz^{3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+yz^{3}\frac{\partial u}{\partial y}-2y^{2}z\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=xy^{6} \ \text{при } z=1,\ y>0.$$

Повышенный уровень

9.(7) Доказать, что при всех $A,B,C\in\mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно

$$xy'''-y'\cos^{2}x=0, \quad 2\le x\le 3, \quad y(2)=A, \quad y'(2)=B, \quad y(3)+y'(3)=C.$$

10.(5) Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x}=u,\ \dot{r}=v,\ \dot{u}=-r,\ \dot{v}=-x+w\left(\frac{w+1}{r}+2\right),\ \dot{w}=-v\left(\frac{w+1}{r}+2\right).$$

Вариант 43 (2013-2014 уч.г.)

1.(5) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}+3y''-4y=\left(\sin x+\cos x\right)^2-8e^{2x}.$$

2.(4) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=10x+y-8z,\\ \dot{y}=9x+4y-10z, \qquad (\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=3)\\ \dot{z}=8x+y-6z.\end{cases}$$

3.(4) Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{8x+2y-7}-1,\\ \dot{y}=x^2-4x-y.\end{cases}$$

4.(5) Найти все решения уравнения

$$x(x-1)^2y''-(x^2-1)y'+(x+1)y=\frac{(x-1)^3}{x\ln^2 x},\quad x>1.$$

5.(5) Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int\limits_{2\pi/3}^{5\pi/6}\left(y'\right)^2\operatorname{ctg}x\,dx,\quad y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0,\quad y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln 3.$$

6.(5) Решить задачу Коши

$$\left(x^3+3x\right)yy''-3\left(x^2+1\right)yy'-\left(x^3+x\right)\left(y'\right)^2=0,\quad y(1)=\sqrt{e},\ y'(1)=4\sqrt{e}.$$

7.(5) Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$5\left(y'\right)^6=6\left[(y')^5+y-x\right].$$

8.(5) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+\left[x^2+2(x-y)z\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\left(z^2+1\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\qquad u=x+y \text{ при } z=0.$$

Повышенный уровень

9.(7) Доказать, что при всех $A,B,C\in\mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно

$$\sqrt{x}y'''-\mathrm{e}^x y'=0,\quad 1\le x\le 5,\qquad y(1)-y'(1)=A,\quad y(5)=B,\quad y'(5)=C.$$

10.(5) Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x}=u,\ \dot{r}=v,\ \dot{u}=v-1,\ \dot{v}=-2r-u+\frac{w(1+2rw)}{r^2},\ \dot{w}=-\frac{v(1+2rw)}{r^2}.$$

Вариант 44 (2013-2014 уч.г.)

1.(5) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}+2y'''+5y''=3\left(5x+2e^{-x}\right)^2.$$

2.(4) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-2y+2z,\\ \dot{y}=7x+9y-6z, \qquad (\lambda_1=3,\ \lambda_{2,3}=\pm i)\\ \dot{z}=6x+8y-5z.\end{cases}$$

3.(4) Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases}\dot{x}=\mathrm{sh}\left(3y-3y^2\right),\\ \dot{y}=3xy-2x+4y-4.\end{cases}$$

4.(5) Найти все решения уравнения

$$x^2(x+1)y''-x(3x+4)y'+2(2x+3)y=\frac{2x^4\ln(x+1)}{x+1}, \quad x>0.$$

5.(5) Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int\limits_{11\pi/6}^{2\pi}\left(y'\right)^2\cos x\,dx, \quad y\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3, \quad y\left(2\pi\right)=0.$$

6.(5) Решить задачу Коши

$$2\left(y^2+y\right)y''+\left(y'\right)^2+\left(y^2-8\right)\left(y'\right)^4=0,\ y\left(10\right)=1,\ y'\left(10\right)=\frac{1}{3}.$$

7.(5) Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$y'\left(y-x-\ln y'\right)=1.$$

8.(5) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$2y^2\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{-x}\frac{\partial u}{\partial y}-z\left(e^{-x}+4y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=yz \text{ при } y^2e^x=1,\ y>0.$$

Повышенный уровень

9.(7) Доказать, что при всех $A,B,C\in\mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно

$$(x+2)y'''-y'\mathrm{ch}x=0,\ -1\le x\le 0, \quad y(-1)=A,\ y'(-1)=B,\ y(0)+2y'(0)=C.$$

10.(5) Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x}=u,\ \ \dot{r}=v,\ \ \dot{u}=-2rx,\ \ \dot{v}=-x^2+\frac{3w^2r^2}{r^3+1},\ \ \dot{w}=-\frac{3vwr^2}{r^3+1}.$$

Методические указания и решения задач

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти все действительные решения линейного уравнения порядка n

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные действительные числа, причем $a_0\neq 0$; $f(x)$ – заданная функция.

Соответствующее линейное однородное уравнение

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{2}$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) есть сумма общего решения (2) и любого частного решения (1): $y(x)=y_o(x)+y_ч(x)$.

Общее решение уравнения (1) всегда зависит ровно от n произвольных постоянных.

<u>Построение общего решения однородного уравнения</u>

Найдём корни характеристического уравнения (2), то есть алгебраического уравнения

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{3}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ различные корни (3), вообще говоря, комплексные. Пусть левая часть (3) представляется в виде

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=a_0(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

тогда $k_j\in\mathbb{N}$ называется кратностью корня λ_j. В случае $k_j=1$ корень называется простым.

I. Действительный корень.

1) Если λ простой действительный корень характеристического уравнения (3), то в общее решение (2) входит

$$C_1e^{\lambda x}. \tag{4}$$

2) Если λ действительный корень (3) кратности k $(k\geq 2)$, то в общее решение (2) входит выражение

$$\left(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1}\right)e^{\lambda x}, \tag{5}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные действительные постоянные.

II. Пусть корнем характеристического уравнения (3) является $\lambda=\alpha+i\beta$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$, i – мнимая единица (т.е. $i^2=-1$). Тогда комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ также корень этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами).

Напомним, что для комплексного числа $z=x+iy$, где $x,y\in\mathbb{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re}z=x$, $\operatorname{Im}z=y$. Кроме того, справедлива формула Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x).$$

3) Если $\lambda=\alpha\pm i\beta$ простые корни характеристического уравнения (3), то в общее решение (2) входит выражение

$$C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (6)$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные постоянные.

4) Если среди корней (3) есть корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k $(k \geq 2)$, то и комплексно сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ имеет ту же кратность k. В общее решение (2) входит выражение

$$\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right) e^{\alpha x}\cos\beta x + \left(D_1 + D_2 x + \ldots + D_k x^{k-1}\right) e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (7)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$, $D_1, D_2, \ldots, D_k$ – произвольные действительные постоянные.

Общее решение (2) находится суммированием выражений вида (4)-(7) для всех корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.

Общее решение уравнения (2) всегда зависит ровно от n произвольных постоянных.

Например, пусть $n = 20$ и характеристическое уравнение (3) имеет вид

$$\lambda^3 (\lambda - 25)(\lambda + 6)^4 (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)(\lambda + 10 - 7i)^5 (\lambda + 10 + 7i)^5 = 0,$$

тогда общим решением (2) является

$$y_o(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{25x} + \left(C_5 + C_6 x + C_7 x^2 + C_8 x^3\right) e^{-6x} +$$

$$+ C_9 \cos 2x + C_{10} \sin 2x + \left(C_{11} + C_{12} x + C_{13} x^2 + C_{14} x^3 + C_{15} x^4\right) e^{-10x} \cos 7x +$$

$$+ \left(C_{16} + C_{17} x + C_{18} x^2 + C_{19} x^3 + C_{20} x^4\right) e^{-10x} \sin 7x.$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{20}$ – произвольные действительные постоянные.

<u>Построение частного решения неоднородного уравнения</u>

Если правая часть $f(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, т.е. $f(x)$ состоит из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $e^{\gamma x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, то частное решение (1) следует искать *методом неопределенных коэффициентов*.

III. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_m(x)\, e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ – многочлен степени m.

5) Если γ не является корнем характеристического уравнения (3), то говорят, что имеет место нерезонансный случай. Частное решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде

$$y = Q_m(x)\, e^{\gamma x}, \qquad (8)$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.

6) Если γ является корнем характеристического уравнения (3) кратности k, то говорят, что имеет место резонанс кратности k. Частное решение (1) ищется в виде

$$y = x^k\, Q_m(x)\, e^{\gamma x}. \qquad (9)$$

Для определения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ следует (8) или (9) подставить в (1), сократить на $e^{\gamma x}$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. Из получившейся системы алгебраических уравнений найдем эти коэффициенты.

IV. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x)=\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x+\tilde{P}_{m_2}(x)\sin\beta x\right)e^{\gamma x}, \tag{10}$$

здесь $P_{m_1}(x)$ и $\tilde{P}_{m_2}(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно, допускается $P_{m_1}(x)\equiv 0$ либо $\tilde{P}_{m_2}(x)\equiv 0$.

Синус и косинус можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\qquad \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$

поэтому правой части вида (10) сопоставляются значения $\lambda=\gamma\pm i\beta$.

7) Если $\gamma+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (3), то говорят, что имеет место нерезонансный случай. Частное решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде

$$y=\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)e^{\gamma x}, \tag{11}$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ – многочлены степени не выше m, равной наибольшей из степеней многочленов $P_{m_1}(x)$ и $\tilde{P}_{m_2}(x)$.

8) Если $\gamma+i\beta$ является корнем (3) кратности k, то говорят, что имеет место резонанс кратности k. Частное решение (1) разыскивается в виде

$$y=x^k\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)e^{\gamma x}. \tag{12}$$

Чтобы найти коэффициенты многочленов $R_m(x)$ и $T_m(x)$, надо подставить (11) или (12) в уравнение (1), приравнять коэффициенты при подобных членах и решить полученную систему алгебраических уравнений.

9) Дифференцирования синусов и косинусов можно избежать, если воспользоваться следующим методом. Представим

$\cos\beta x=\operatorname{Re}e^{i\beta x},\quad \sin\beta x=\operatorname{Im}e^{i\beta x}=-\operatorname{Re}\left(i\,e^{i\beta x}\right),\quad f(x)=\operatorname{Re}F(x),$ где

$F(x)=\left(P_{m_1}(x)-i\,\tilde{P}_{m_2}(x)\right)e^{(\gamma+i\beta)x}.$ Найдем частное решение $z(x)$ уравнения

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}z'+a_nz=F(x), \tag{13}$$

тогда $y(x)=\operatorname{Re}z(x)$ будет частным решением (1). Аналогично можно представить

$\cos\beta x=\operatorname{Re}e^{i\beta x}=\operatorname{Im}\left(i\,e^{i\beta x}\right),\quad \sin\beta x=\operatorname{Im}e^{i\beta x},\quad f(x)=\operatorname{Im}F(x),$ где

$$F(x)=\left(iP_{m_1}(x)+\tilde{P}_{m_2}(x)\right)e^{(\gamma+i\beta)x}.$$

Найдем для этой функции частное решение $z(x)$ уравнения (13), тогда $y(x)=\operatorname{Im}z(x)$ будет частным решением (1). Способ построения частного решения уравнения (13) описан в пункте III, но в этом случае коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ будут комплексными.

Если правая часть уравнения (1) представлена в виде суммы нескольких функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_l(x)$, то частное решение неоднородного уравнения (1) состоит из суммы частных решений y_j неоднородных уравнений

$$a_0y_j^{(n)}+a_1y_j^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_j'+a_ny_j=f_j(x),\quad j=1,\ldots,l.$$

Напомним, что для вычисления производных второго порядка может быть полезна формула Лейбница

$$(gh)'' = g''\,h + 2g'\,h' + g\,h''\,. \tag{14}$$

<u>Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене</u>

Задача 41-1. Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} - 8y'' - 9y = 5\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 - 4e^{-x}\,.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение: $\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5 = \{9; -1\}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$y_o(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$,

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – произвольные действительные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

$f(x) = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) - 4e^{-x} = 5 - 5\sin x - 4e^{-x}$,

т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = -5\sin x$, $f_3(x) = -4e^{-x}$.

1) $f_1(x) = 5 = 5\,e^{0\cdot x}$. Значение $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ резонанса нет, частное решение ищем в виде $y(x) = a$. Подставляя его в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x) = 5$, получаем

$$-9a = 5, \quad a = -\frac{5}{9}, \quad y_1(x) = -\frac{5}{9}.$$

2) $f_2(x) = -5\sin x$. Значение $\lambda = i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1 $\Rightarrow$ имеет место резонанс кратности 1.

<u>1 способ.</u> Частное решение ищем в виде $y(x) = x\left(A\cos x + B\sin x\right)$. Используя формулу Лейбница (14) и равенства $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, вычислим

$$y''(x) = 2\left(-A\sin x + B\cos x\right) - x\left(A\cos x + B\sin x\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = 2\left(A\sin x - B\cos x\right) - y''(x) = 4\left(A\sin x - B\cos x\right) + x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение при $f(x) = f_2(x) = -5\sin x$, имеем

$$4\left(A\sin x - B\cos x\right) + x\left(A\cos x + B\sin x\right) - 16\left(-A\sin x + B\cos x\right) +$$
$$+8x\left(A\cos x + B\sin x\right) - 9x\left(A\cos x + B\sin x\right) = -5\sin x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в обеих частях уравнения:

$$\begin{aligned} &\sin x: \quad 4A + 16A = -5, \quad \Rightarrow \quad A = -1/4, \\ &\cos x: \quad -4B - 16B = 0, \quad \Rightarrow \quad B = 0, \end{aligned} \qquad y_2(x) = -\frac{x\cos x}{4}\,.$$

<u>2 способ.</u> Воспользуемся методом, описанным в пункте 9). Представим $f_2(x) = -5\sin x = -5\,\mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$ и перейдем к уравнению $z^{\mathrm{IV}} - 8z'' - 9z = -5\,e^{ix}$. Поскольку имеет место резонанс кратности 1, то будем искать частное решение в виде $z(x) = b\,x\,e^{ix}$.

Тогда $z''(x)=2bie^{ix}-bxe^{ix}$, $z^{\mathrm{IV}}(x)=-2bie^{ix}-z''(x)=-4bie^{ix}+bxe^{ix}$. Здесь мы вновь применили формулу Лейбница (14). Подставив полученные выражения в уравнение для z и сократив его на e^{ix}, имеем

$$-4bi+bx-16bi+8bx-9bx=-5 \;\Rightarrow\; -20bi=-5,\quad b=-\frac{i}{4},\quad z(x)=-\frac{ixe^{ix}}{4}.$$

Теперь частное решение (1) находим по формуле

$$y_2(x)=\operatorname{Im} z(x)=-\frac{x}{4}\operatorname{Im}\left(i\cos x-\sin x\right)=-\frac{x\cos x}{4}.$$

3) $f_3(x)=-4e^{-x}$. Значение $\lambda=-1$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ резонанса нет, частное решение ищем в виде $y(x)=a\,e^{-x}$ $\Rightarrow$ $y''(x)=y^{\mathrm{IV}}(x)=a\,e^{-x}$. Подставив эти выражения в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_3(x)=-4e^{-x}$ и сократив его на e^{-x}, получаем

$$a-8a-9a=-4,\quad -16a=-4,\quad a=\frac{1}{4},\quad y_3(x)==\frac{e^{-x}}{4}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o(x)+y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3\sin x+C_4\cos x-\frac{5}{9}-\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}.$$

Задача 42-1. Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}-2y'''+2y''=\left(6x-e^{x}\right)^2.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение: $\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=0.$

$\lambda^2-2\lambda+2=0$, $\lambda=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i,$ $\lambda_{1,2}=0,$ $\lambda_3=1+i$, $\lambda_4=1-i$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$y_o(x)=C_1+C_2x+\left(C_3\sin x+C_4\cos x\right)e^{x}$,

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

$f(x)=36x^2-12xe^{x}+e^{2x}=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),$

где $f_1(x)=36x^2$, $f_2(x)=-12xe^{x}$, $f_3(x)=e^{2x}$.

1) $f_1(x)=36x^2=36x^2\,e^{0\cdot x}$. Значение $\lambda=0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2 $\Rightarrow$ имеет место резонанс кратности 2, частное решение ищем в виде $y(x)=x^2\left(ax^2+bx+c\right)=ax^4+bx^3+cx^2$. Тогда $y'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx,$

$y''(x)=12ax^2+6bx+2c,$ $y'''(x)=24ax+6b,$ $y^{\mathrm{IV}}(x)=24a$. Подставляя полученные выражения в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_1(x)=36x^2$, имеем

$$24a-48ax-12b+24ax^2+12bx+4c=36x^2.$$

Приравняем коэффициенты при различных степенях x

$$x^2:\ 24a=36,\quad \Rightarrow\quad a=3/2,$$
$$x:\ -48a+12b=0,\quad \Rightarrow\quad b=4a=6,$$
$$1:\ 24a-12b+4c=0,\quad \Rightarrow\quad c=-6a+3b=-9+18=9.$$

Таким образом, $y_1(x)=\dfrac{3}{2}x^4+6x^3+9x^2$.

2) $f_2(x)=-12xe^x$. Значение $\lambda=1$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ резонанса нет, частное решение ищется в виде $y(x)=(Ax+B)\,e^x$. Тогда

$y''(x)=(Ax+2A+B)\,e^x,\quad y'''(x)=(Ax+3A+B)\,e^x,\quad y^{\mathrm{IV}}(x)=(Ax+4A+B)\,e^x.$

Подставив эти выражения в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_2(x)=-12xe^x$ и сократив его на e^x, получаем

$Ax+4A+B-2(Ax+3A+B)+2(Ax+2A+B)=-12x\quad \Rightarrow\quad A=-12,\ B=-2A=24.$ В результате находим частное решение $y_2(x)=(24-12x)e^x$.

3) $f_3(x)=e^{2x}$. Значение $\lambda=2$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ имеет место нерезонансный случай, соответствующее частное решение разыскивается в виде $y(x)=b\,e^{2x}\quad \Rightarrow\quad y''(x)=4b\,e^{2x},\ y'''(x)=8b\,e^{2x},\ y^{\mathrm{IV}}(x)=16b\,e^{2x}$. Подставив эти производные в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_3(x)=e^{2x}$ и сократив его на e^{2x}, находим $16b-16b+8b=1,\ b=\dfrac{1}{8},\ y_3(x)=\dfrac{1}{8}e^{2x}$.

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o(x)+y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)=$$
$$=C_1+C_2x+\left(C_3\sin x+C_4\cos x\right)e^x+\frac{3}{2}x^4+6x^3+9x^2+\left(24-12x\right)e^x+\frac{1}{8}e^{2x}.$$

2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти все действительные решения линейной однородной системы третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \dot{y} = b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \dot{z} = c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{cases} \tag{1}$$

где a_j, b_j, c_j, $j = 1, 2, 3$, заданные действительные числа; $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $t \in \mathbb{R}$ - независимая переменная.

Запишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Обычно собственные значения A заданы по условию задачи или их можно найти, решив характеристическое уравнение $\det\left(A - \lambda E\right) = 0$, где E - единичная матрица третьего порядка.

Напомним некоторые сведения из курса линейной алгебры:

1) собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ, называется вектор $h \neq 0$ такой, что

$$(A - \lambda E)\,h = 0. \tag{2}$$

Для каждого собственного значения существует хотя бы один собственный вектор. Число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, не превосходит кратности собственного значения;

2) число линейно независимых решений однородной алгебраической системы (2) равно $3 - r$, где r - ранг матрицы $A - \lambda E$;

3) множество решений системы (2) не изменится, если матрицу $A - \lambda E$ привести к упрощенному виду при помощи элементарных преобразований строк. Под элементарными преобразованиями строк матрицы понимаются следующие действия:

-- поменять местами строки матрицы;

-- умножить строку на число, не равное нулю;

-- прибавить к какой-либо строке линейную комбинацию других строк матрицы;

4) расширенной матрицей неоднородной линейной алгебраической системы

$$(A - \lambda E)\,h = b \tag{3}$$

называется матрица $\tilde{A} = (A - \lambda E|b)$, полученная приписыванием справа к матрице $A - \lambda E$ столбца правых частей. Множество решений системы (3) не изменится, если расширенную матрицу привести к упрощенному виду при помощи элементарных преобразований её строк. Система (3) имеет решение тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу $A - \lambda E$.

Построение общего решения системы (1)

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ простое собственное значение матрицы A. Из системы (2) найдем постоянный действительный собственный вектор h, отвечающий данному собственному значению. Для отыскания собственного вектора h нужно матрицу $A - \lambda E$ системы (2) привести к упрощенному виду при помощи элементарных преобразований строк. По преобразованной матрице можно записать упрощенную однородную систему, для которой легко подбирается действительное нетривиальное решение. В общее решение (1) входит выражение

$$C_1 e^{\lambda t} h, \tag{4}$$

где C_1 - произвольная действительная постоянная.

Если матрица A имеет три линейно независимых собственных вектора h_1, h_2, h_3, отвечающих действительным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то (независимо от кратности собственных значений) общее решение (1) имеет вид $\sum_{j=1}^{3} C_j e^{\lambda_j t} h_j$. Однако этот случай слишком простой и обычно не дается в экзаменационных работах.

2. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ собственное значение матрицы A кратности 2 и ранг матрицы $A-\lambda E$ равен двум, т.е. существует только один линейно независимый собственный вектор, отвечающий этому собственному значению. Тогда построим жорданову цепочку матрицы A, состоящую из двух постоянных действительных векторов h_1 и h_2. Здесь h_1 - собственный вектор, h_2 - *присоединённый* вектор. h_1 и h_2 находятся последовательным решением алгебраических систем

$$(A-\lambda E) h_1 = 0, \quad h_1 \neq 0,$$
$$(A-\lambda E) h_2 = h_1. \tag{5}$$

Метод построения h_1 описан в предыдущем пункте. Для отыскания присоединённого вектора h_2 следует записать расширенную матрицу $\tilde{A} = (A-\lambda E | h_1)$ системы (5) и привести её к упрощенному виду при помощи элементарных преобразований строк. По преобразованной расширенной матрице можно записать упрощенную неоднородную алгебраическую систему, для которой легко подбирается действительное решение. В общее решение (1) входит выражение

$$C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} \left(t h_1 + h_2\right), \tag{6}$$

где C_1, C_2 - произвольные действительные постоянные.

3. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ собственное значение матрицы A кратности 3. Рассмотрим два случая.

3.1. Ранг матрицы $A-\lambda E$ равен двум, т.е. существует только один линейно независимый собственный вектор. Тогда построим жорданову цепочку матрицы A, состоящую из трёх постоянных действительных векторов h_1, h_2 и h_3. Здесь h_1 - собственный вектор, h_2 и h_3 - *присоединённые* векторы. Векторы цепочки находятся последовательным решением алгебраических систем

$$(A-\lambda E) h_1 = 0, \quad h_1 \neq 0,$$
$$(A-\lambda E) h_2 = h_1,$$
$$(A-\lambda E) h_3 = h_2.$$

Общее решение системы (1) имеет вид

$$C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} \left(t h_1 + h_2\right) + C_3 e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2} h_1 + t h_2 + h_3\right),$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные действительные постоянные.

3.2. Ранг матрицы $A-\lambda E$ равен единице. Матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора h_1 и h_2, т.е. имеет собственное подпространство размерности 2. Для построения базиса необходимо найти ещё один присоединённый вектор h_3. В качестве h_2 возьмём ненулевой столбец матрицы $A-\lambda E$ или пропорциональный ему. В качестве h_1 - любой собственный вектор A, линейно независимый с h_2. Тогда присоединённый вектор находится из системы $(A-\lambda E)\,h_3=h_2$. Действительно, эта система совместна только при условии, что ранг расширенной матрицы $(A-\lambda E|h_2)$ равен единице, следовательно, h_2 пропорционален базисному столбцу матрицы $A-\lambda E$. Общее решение системы (1) имеет вид $C_1 e^{\lambda t}\,h_1+C_2\,e^{\lambda t}h_2+C_3\,e^{\lambda t}\left(t\,h_2+h_3\right)$, где C_1,C_2,C_3 - произвольные действительные постоянные. Заметим, что описанный случай считается слишком сложным и обычно не включается в письменные экзаменационные работы.

4. Пусть матрица A имеет комплексные собственные значения $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$, i – мнимая единица, т.е. $i^2=-1$. Для определённости будем считать, что $\beta>0$.

Напомним, что для комплексного числа $z=x+iy$, где $x,y\in\mathbb{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re}z=x$, $\operatorname{Im}z=y$. Комплексно сопряженным по отношению к z числом называется $\overline{z}=x-iy$, при этом $z\,\overline{z}=x^2+y^2=|\,z\,|^2$. Деление на комплексное число сводится к умножению по правилу $\dfrac{z_1}{z}=\dfrac{z_1\,\overline{z}}{z\,\overline{z}}=\dfrac{z_1\,\overline{z}}{|\,z\,|^2}$. Кроме того, справедлива формула Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right).$$

Для построения решений (1) выберем собственное значение с положительной мнимой частью $\lambda=\alpha+i\beta$ и найдем для него комплексный собственный вектор h из системы

$$\left(A-(\alpha+i\beta)E\right)h=0.$$

Матрицу этой системы $A-(\alpha+i\beta)E$ не следует приводить к упрощенному виду при помощи элементарных преобразований строк. Из определения собственного значения следует, что не все строки матрицы $A-(\alpha+i\beta)E$ линейно независимы. Выберем две её линейно независимые строки, наиболее удобные для вычислений. Запишем линейную систему из двух алгебраических уравнений, соответствующих выбранным строкам, и найдём одно из нетривиальных решений этой системы, которое и будет собственным вектором h.

Представим $h=h^R+ih^I$, где h^R,h^I - действительные векторы, $h^R=\operatorname{Re}h$, $h^I=\operatorname{Im}h$. Далее рассмотрим произведение

$$\begin{aligned}e^{(\alpha+i\beta)t}h&=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)\left(h^R+ih^I\right)=\\&=e^{\alpha t}\left(h^R\cos\beta t-h^I\sin\beta t\right)+ie^{\alpha t}\left(h^R\sin\beta t+h^I\cos\beta t\right)\end{aligned}$$

и выделим из него действительную и мнимую части. В общее решение (1) входит выражение

$$\begin{aligned}&C_1\operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}h\right)+C_2\operatorname{Im}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}h\right)=\\&=C_1\,e^{\alpha t}\left(h^R\cos\beta t-h^I\sin\beta t\right)+C_2\,e^{\alpha t}\left(h^R\sin\beta t+h^I\cos\beta t\right),\end{aligned}\tag{7}$$

где C_1,C_2 - произвольные действительные постоянные.

Замечание. Собственным вектором, отвечающим второму собственному значению $\bar{\lambda}$, будет комплексно сопряжённый с h вектор $\bar{h} = h^R - ih^I$, однако находить его не требуется. Для построения собственного вектора достаточно выбрать только одно из двух комплексно сопряжённых собственных значений. Мы взяли $\lambda = \alpha + i\beta$. Выбор $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также возможен, но при дальнейших преобразованиях нужно учитывать, что $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\sin\beta t\right)$. Потеря «минуса» в последней формуле является одной из распространенных вычислительных ошибок, поэтому проще всегда выбирать то собственное значение, для которого мнимая часть положительна.

6. Если матрица A имеет различные собственные значения, то общее решение системы (1) находится суммированием решений для всех собственных значений A, то есть суммированием решений вида (4) и (6) либо вида (4) и (7).

Замечание. **Общее решение системы (1) всегда зависит от трёх произвольных постоянных.**

<u>Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене</u>

Задача 41-2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y - 3z, \\ \dot{y} = 2x - 4y - 2z, \\ \dot{z} = 2x - 3y - 4z. \end{cases} \qquad (\lambda_{1,2} = -2,\ \lambda_3 = -3)$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_{1,2} = -2$, $(A+2E)h_1 = 0$, h_1 - собственный вектор,

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x - z = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединённый вектор h_2 из системы $(A+2E)h_2 = h_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \begin{cases} y = -1, \\ x - z = -1, \end{cases} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_3 = -3$, $(A+3E)h_3 = 0$, h_3 - собственный вектор,

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} z = 2y, \\ 5y = 2x, \end{cases} \quad h_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 42-2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 4y + 10z, \\ \dot{y} = 14x - 12y + 27z, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 8z. \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i)$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 \\ 14 & -12 & 27 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_1 = 2$, $(A - 2E)h_1 = 0$, h_1 - собственный вектор,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 14 & -14 & 27 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2i$, $(A - 2iE)h_2 = 0$, h_2 - собственный вектор,

$A - 2iE = \begin{pmatrix} 6-2i & -4 & 10 \\ 14 & -12-2i & 27 \\ 4 & -4 & 8-2i \end{pmatrix}$. Рассмотрим только первую и третью строки матрицы $A - 2iE$. Поделив их на 2, получаем систему

$\begin{cases} (3-i)x - 2y + 5z = 0, \\ 2x - 2y + (4-i)z = 0. \end{cases}$ Вычтем второе уравнение из первого:

$$(1-i)x + (1+i)z = 0, \qquad z = -\frac{(1-i)x}{1+i} = -\frac{(1-i)^2 x}{2} = -\frac{(1-2i-1)x}{2} = ix.$$

Выразим из первого уравнения $2y = (3-i)x + 5z = (3-i)x + 5ix = (3+4i)x$.

Возьмём $x = 2$, тогда $y = 3+4i,\ z = 2i$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+4i \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Преобразуем произведение $e^{\lambda_2 t} h_2 = e^{2it} h_2 = (\cos 2t + i \sin 2t)\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + i \left[\sin 2t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ 3\cos 2t - 4\sin 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 3\sin 2t + 4\cos 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ 3\cos 2t - 4\sin 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 3\sin 2t + 4\cos 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Чтобы более полно рассмотреть случай комплексно сопряжённых собственных значений, решим дополнительную задачу.

Задача. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 6y + 5z, \\ \dot{y} = -11x + 14y + 10z, \\ \dot{z} = 19x - 14y - z. \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 4,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm 5i)$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -11 & 14 & 10 \\ 19 & -14 & -1 \end{pmatrix}$.

1) $\lambda_1 = 4$, $(A - 4E)h_1 = 0$, h_1 - собственный вектор,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 5 \\ -11 & 10 & 10 \\ 19 & -14 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 12 & -8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} z = -2x/5, \\ y = 3x/2, \end{cases} \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 3 + 5i$, $\left(A - (3+5i)E\right)h_2 = 0$, h_2 - собственный вектор,

$A - (3+5i)\,E = \begin{pmatrix} -6-5i & 6 & 5 \\ -11 & 11-5i & 10 \\ 19 & -14 & -4-5i \end{pmatrix}$. Рассмотрим только первую и вторую строки матрицы $A - (3+5i)E$, им соответствует система

$$\begin{cases} -(6+5i)x + 6y + 5z = 0, \quad \Rightarrow \quad 5z = (6+5i)x - 6y, \ \text{подставим во второе уравнение:} \\ -11x + (11-5i)y + 10z = 0. \end{cases}$$

$-11x + (11-5i)y + 2(6+5i)x - 12y = (1+10i)x - (1+5i)y = 0.$ Возьмём $x = 1+5i$, тогда $y = 1+10i,\ 5z = (6+5i)(1+5i) - 6(1+10i) = 6 + 5i + 30i - 25 - 6 - 60i = -25 - 25i$,

$$z = -5 - 5i,\ h_2 = \begin{pmatrix} 1+5i \\ 1+10i \\ -5-5i \end{pmatrix}.$$

Преобразуем произведение $e^{\lambda_2 t}h_2$, для краткости обозначив $\mathrm{c} = \cos 5t,\ \mathrm{s} = \sin 5t.$

$$e^{(3+5i)t}h_2 = e^{3t}(\mathrm{c} + i\,\mathrm{s})\begin{pmatrix} 1+5i \\ 1+10i \\ -5-5i \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} \mathrm{c} + i\,\mathrm{s} + 5i\,\mathrm{c} - 5\,\mathrm{s} \\ \mathrm{c} + i\,\mathrm{s} + 10i\,\mathrm{c} - 10\,\mathrm{s} \\ -5\,\mathrm{c} - 5i\,\mathrm{s} - 5i\,\mathrm{c} + 5\,\mathrm{s} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} \mathrm{c} - 5\,\mathrm{s} \\ \mathrm{c} - 10\,\mathrm{s} \\ 5\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{c} \end{pmatrix} + i\,e^{3t}\begin{pmatrix} \mathrm{s} + 5\,\mathrm{c} \\ \mathrm{s} + 10\,\mathrm{c} \\ -5\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{c} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t - 5\sin 5t \\ \cos 5t - 10\sin 5t \\ 5\sin 5t - 5\cos 5t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{pmatrix} \sin 5t + 5\cos 5t \\ \sin 5t + 10\cos 5t \\ -5\sin 5t - 5\cos 5t \end{pmatrix}.$$

3. Положения равновесия автономных систем

Рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \qquad (1)$$

где f и g заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – решение (1), то параметрическая заданная кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ называется *фазовой траекторией* системы (1). Направление возрастания параметра t указывается стрелкой на фазовой траектории. Фазовые траектории автономной системы не пересекаются.

Точка $M(x_0,y_0)$ называется *положением равновесия* автономной системы (1) , если пара функций $x(t)\equiv x_0$, $y(t)\equiv y_0$ является решением (1), т.е. $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$.

<u>Линейная автономная система</u>

Линейная однородная автономная система второго порядка имеет вид

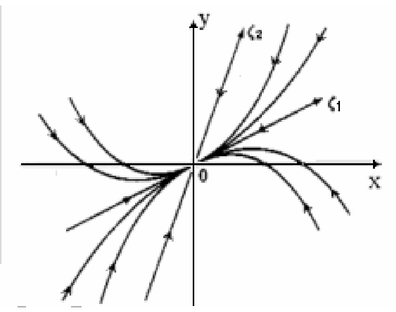
$$\begin{cases} \dot{x} = ax+by, \\ \dot{y} = cx+dy, \end{cases} \qquad (2)$$

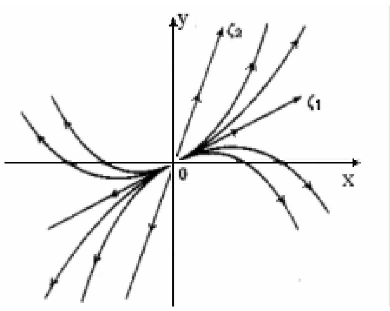
где a, b, c, d заданные действительные числа. Матрица системы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Будем считать, что $\det A \neq 0$. Тогда единственным положением равновесия (2) является точка $(0,0)$. Найдем собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A, решив уравнение $\det(A-\lambda E)=0.$ Мы рассмотрим три основных типа положений равновесия системы (2).

I. Собственные значения матрицы A действительные, различные $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ и оба не равны нулю $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$. Найдем собственные векторы h_1 и h_2, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2, из систем $(A-\lambda_1 E)h_1=0, h_1\neq 0$ и $(A-\lambda_2 E)h_2=0, h_2\neq 0$. Проведем через начало координат прямую $O\zeta_1$, для которой h_1 является направляющим вектором, и прямую $O\zeta_2$, для которой h_2 является направляющим вектором. На рисунке, изображающем фазовые траектории системы, собственные векторы можно не обозначать, но направления собственных векторов нужно строго выдерживать и проводить прямые $O\zeta_1$, $O\zeta_2$ под тем углом, который задается собственным вектором.

1. **Узел**. Если собственные значения матрицы A одного знака $(\lambda_1\lambda_2 > 0)$, то положение





Устойчивый узел, $\lambda < 0$ Неустойчивый узел, $\lambda > 0$

Рис. 1. Узлы, $|\lambda_1|<|\lambda_2|$

равновесия называется *узлом*. Узел называется *устойчивым*, если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, и *неустойчивым*, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Фазовые траектории изображаются прямыми $O\zeta_1$, $O\zeta_2$ и параболами. Параболы касаются в точке $(0,0)$ той прямой ($O\zeta_1$ или $O\zeta_2$), для которой $|\lambda|$ меньше. Стрелки на фазовых траекториях направлены к положению равновесия для устойчивого узла и от положения равновесия для неустойчивого узла. Схематическая картина фазовых траекторий в окрестности устойчивого и неустойчивого узлов изображена на рис. 1 для случая $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

2. **Седло**. Если собственные значения матрицы A имеют разные знаки $(\lambda_1\lambda_2 < 0)$, то положение равновесия называется *седлом*. Фазовые траектории изображаются прямыми $O\zeta_1$, $O\zeta_2$ и гиперболами, для которых прямые $O\zeta_1$, $O\zeta_2$ служат асимптотами. На прямой ($O\zeta_1$ или $O\zeta_2$), соответствующей отрицательному собственному значению $\lambda < 0$, стрелки указывают направление к положению равновесия. На прямой ($O\zeta_1$ или $O\zeta_2$), соответствующей положительному собственному значению $\lambda > 0$, стрелки направлены от положения равновесия. Направление стрелок на гиперболах согласуется с направлением движения по асимптотам $O\zeta_1$ и $O\zeta_2$.

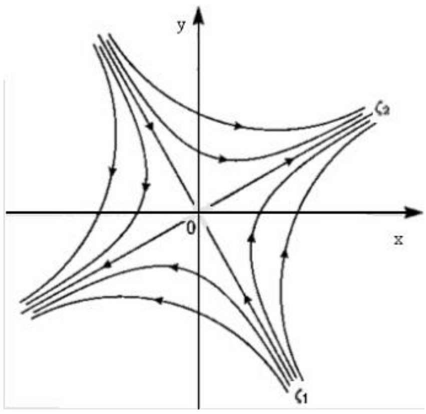
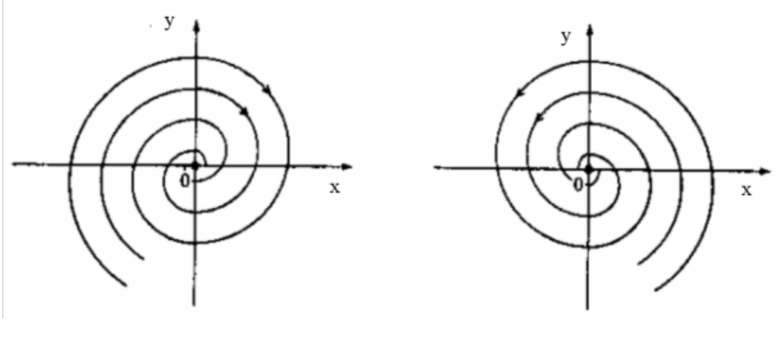


Рис. 2. Седло, $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

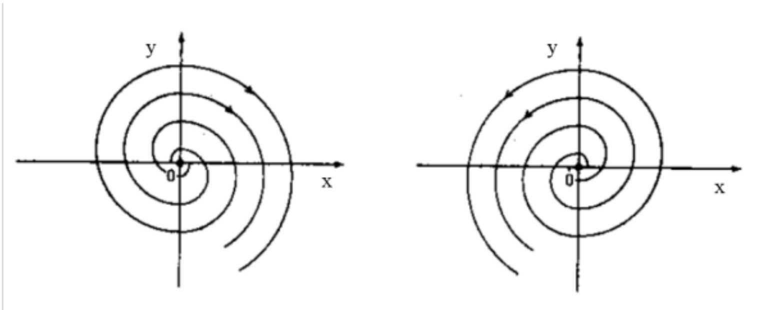
Схематическая картина фазовых траекторий в окрестности седла изображена на рис. 2 для случая $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$.

3. **Фокус**. Пусть матрица A имеет комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, тогда положение равновесия называется *фокусом*. Фокус называется *устойчивым*, если $\alpha < 0$, и *неустойчивым*, если $\alpha > 0$. Фазовые траектории изображаются в виде спиралей, которые закручивающихся вокруг положения равновесия. Стрелки на спирали должны быть направлены к положению равновесия в случае устойчивого фокуса и от положения равновесия в случае неустойчивого фокуса. На рисунках 3 и 4 изображена картина фазовых траекторий в окрестности устойчивых и неустойчивых фокусов с закручиванием спиралей по часовой или против часовой стрелки. В фокусе не требуется находить собственные векторы, однако необходимо определить направление закручивания траекторий. Для этого нужно найти в какой-либо точке плоскости вектор скорости $p = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, определяемый по формулам (2).



По часовой стрелке Против часовой стрелки

Рис. 3. Устойчивые фокусы, $\operatorname{Re}\lambda < 0$



По часовой стрелке Против часовой стрелки

Рис. 4. Неустойчивые фокусы, $\operatorname{Re}\lambda > 0$

Например, возьмем точку $(1,0)$, вектор скорости в этой точке $p = \begin{pmatrix} \dot{x}(1,0) \\ \dot{y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Если $c > 0$, то движение по спирали происходит против часовой стрелки (скорость направлена вверх), если $c < 0$, то движение происходит по часовой стрелке (скорость направлена вниз). Часто вектор скорости p не направлен строго по касательной к траектории. Это объясняется тем, что спирали изображаются чисто схематически. В действительности они могут быть деформированы, но не требуется определять, вдоль какого направления и насколько сильно траектория сжата или вытянута.

Кроме описанных типов положений равновесия существуют различные вырожденные случаи, их перечисление можно найти в учебниках.

<u>Линеаризация нелинейной автономной системы</u>

Пусть точка $M\left(x_0, y_0\right)$ является положением равновесия системы (1), т.е. $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Сделаем замену переменных $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, в новых переменных u, v положение равновесия будет находиться в точке $(0,0)$. Вычислим в точке M частные производные

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial g\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial g\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = d.$$

Линейная однородная система

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv, \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases} \qquad (3)$$

называется *линеаризованной системой* по отношению к (1) в окрестности точки M.

Вместо вычисления частных производных можно использовать известные разложения элементарных функций и разложить $f(x_0+u, y_0+v)$, $g(x_0+u, y_0+v)$ в окрестности точки $u=v=0$ по формуле Тейлора с точностью до членов первого порядка:

$$\begin{cases}\dot{u} = f(x_0+u, y_0+v) = au+bv+o\big(|u|+|v|\big),\\ \dot{v} = g(x_0+u, y_0+v) = cu+dv+o\big(|u|+|v|\big)\end{cases} \quad \text{при} \quad (u,v)\to(0,0).$$

Отбрасывая члены более высокого порядка малости, получим линеаризованную систему (3).

Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене

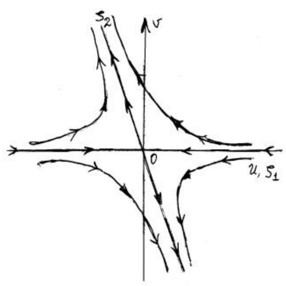
Задача 41-3. Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases}\dot{x} = \operatorname{arctg}(1-2x-y) = f(x,y),\\ \dot{y} = 2x - x^2 + y = g(x,y).\end{cases}$$

Решение. Положения равновесия находим из системы уравнений $\begin{cases} f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0\end{cases}$ или

$$\begin{cases}1-2x-y=0,\\ 2x-x^2+y=0,\end{cases} \Rightarrow \quad x^2=1,\ x=\pm1,\ y=1-2x.$$ Положения равновесия: $M_1(1;-1)$, $M_2(-1;3)$.

1. Исследуем положение равновесия $M_1(1;-1)$. Замена $x=u+1,\ y=v-1$. При вычислении частных производных от f сразу будем учитывать, что в положении равновесия аргумент арктангенса равен нулю. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-1,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=2-2x=0,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=1.$



Линеаризованная система

$$\begin{cases}\dot{u}=-2u-v,\\ \dot{v}=v,\end{cases} \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \text{матрица системы.}$$

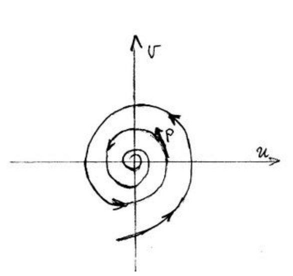
Собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=1$

$\Rightarrow$ седло. Найдем собственные векторы.

$$\lambda_1=-2,\ A+2E=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ h_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\lambda_2=1,\ A-E=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ h_2=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}.$$

2. Исследуем положение равновесия $M_2(-1;3)$. Замена $x=u-1,\ y=v+3$. При вычислении частных производных от f вновь будем учитывать, что в положении равновесия аргумент арктангенса равен нулю. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-1,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=2-2x=4,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=1.$



Линеаризованная система

$$\begin{cases}\dot{u}=-2u-v,\\ \dot{v}=4u+v,\end{cases} \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix} - \text{матрица системы.}$$

Найдем собственные значения матрицы A из уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+2=0,\ \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \text{устойчивый фокус.}$$

В точке $u=1, v=0$ находим из линеаризованной системы вектор скорости

$p = \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}_{u=1, v=0} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ против часовой стрелки.

Задача 42-3. Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases} \dot x = -x + 2y - xy = f(x, y), \\ \dot y = \ln\left(1 + 4x - 3y - xy\right) = g(x, y). \end{cases}$$

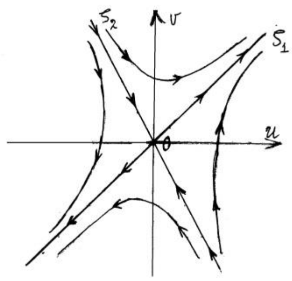
Решение. Положения равновесия находим из системы уравнений $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} -x + 2y - xy = 0, \\ 1 + 4x - 3y - xy = 1, \end{cases} \Rightarrow x = y,\ x(1-x) = 0.$ Положения равновесия: $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$.

1. Исследуем положение равновесия $M_1(0;0)$. Замена $x = u,\ y = v$. При вычислении частных производных от g сразу будем учитывать, что в положении равновесия аргумент логарифма равен единице. $\frac{\partial f}{\partial x} = -1 - y = -1,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - x = 2,\ \ \frac{\partial g}{\partial x} = 4 - y = 4,\ \ \frac{\partial g}{\partial y} = -3 - x = -3.$

Линеаризованная система

$\begin{cases} \dot u = -u + 2v, \\ \dot v = 4u - 3v, \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ – матрица системы.



Найдем собственные значения матрицы A из уравнения

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$,

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5 \Rightarrow$ седло. Найдем собственные векторы.

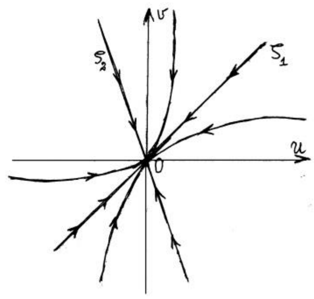
$\lambda_1 = 1,\ A - E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\qquad \lambda_2 = -5,\ A + 5E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2. Исследуем положение равновесия $M_2(1;1)$. Замена $x = u + 1,\ y = v + 1$. При вычислении частных производных от g вновь будем учитывать, что в положении равновесия аргумент логарифма равен единице.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 - y = -2,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - x = 1,\ \ \frac{\partial g}{\partial x} = 4 - y = 3,\ \ \frac{\partial g}{\partial y} = -3 - x = -4.$

Линеаризованная система

$\begin{cases} \dot u = -2u + v, \\ \dot v = 3u - 4v, \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ – матрица системы.



Найдем собственные значения матрицы A из уравнения

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5) = 0$,

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -5 \Rightarrow$ устойчивый узел, касание к h_1.

Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = -1,\ A + E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},\ h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\qquad \lambda_2 = -5,\ A + 5E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

4. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Пусть требуется найти все решения уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные на рассматриваемом промежутке $I \subset \mathbb{R}$ функции.

1. Вначале решим соответствующее однородное уравнение

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{2}$$

1) Одно (нетривиальное) частное решение этого уравнения $y_1(x)$ подбирается в виде $e^{\alpha x}$, либо x^{α}, либо многочлена:

а) Подставляем $y = e^{\alpha x}$ в уравнение (2), сокращаем его на $e^{\alpha x}$ и приравниваем нулю коэффициенты при различных степенях x. Если полученная система имеет решение, то из неё находим значение α.

б) Подставляем $y = x^{\alpha}$ в уравнение (2), приравниваем нулю коэффициент при самой старшей степени x. Получаем значение α, затем проверяем, является ли $y = x^{\alpha}$ решением (2). Если $\alpha = n$ – натуральное число, но $y = x^{\alpha}$ не подходит, то можно попытаться найти частное решение (2) в виде действительного многочлена $y = x^n + d_1 x^{n-1} + ... + d_n$. Числа $d_1, ..., d_n$ находятся подстановкой в (2), если решение такого вида существует.

Замечание 1. Описанный метод применим в случае, если уравнение (2) можно привести к виду, когда его коэффициенты являются многочленами. При произвольных коэффициентах $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ не существует универсального алгоритма для отыскания частного решения (2).

2) Пусть $y_1(x)$ найденное частное решение (2) и $y(x)$ произвольное решение того же уравнения, раскроем для них определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = y'(x)\, y_1(x) - y(x)\, y_1'(x)$$

и запишем формулу Лиувилля-Остроградского в виде

$$y'(x)\, y_1(x) - y(x)\, y_1'(x) = C \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx \right),$$

где C - произвольная постоянная, а под интегралом в показателе экспоненты понимается какая-либо одна из первообразных. Разделив обе части этого равенства на $y_1^2(x)$, получим слева полную производную от дроби y/y_1:

$$\left(\frac{y}{y_1} \right)' = \frac{C}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx \right). \tag{3}$$

Проинтегрировав (3), находим общее решение однородного уравнения (2)

$$y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{4}$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Замечание 2. Если подбором удается найти два линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения (2), то формулу (3) применять не нужно, общее решение (2) сразу записывается в виде (4).

Замечание 3. Найти общее решение (2) без применения формулы Лиувилля –Остроградского можно следующим методом: подставим $y = y_1 z$ в уравнение (2), а затем сделаем замену $z' = u$. Порядок будет понижен при сохранении линейности уравнения.

2. Общее решение исходного неоднородного уравнения строится на основе (4) по методу вариации постоянных, то есть общее решение (1) разыскивается в виде

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x),$$

где неизвестные функции $C_1(x), C_2(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Отметим, что общее решение (1) есть общее решение (2) плюс какое-либо частное решение (1). Общее решение (1) всегда представляется в виде

$$y(x) = y_o(x) + y_ч(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_ч(x).$$

Собственно, для отыскания частного решения $y_ч(x)$ и служит метод вариации постоянных. Общее решение (1) всегда зависит от **двух** произвольных постоянных.

Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене

Задача 41-4. Найти все решения уравнения

$$x^2(x+2)^2 y'' - x(x^2-4)y' + x(x-2)y = 5(x+2)^3 \ln^3 x.$$

Решение. 1. Однородное уравнение. Ищем частное решение в виде $y = x^\alpha$, тогда $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}$. Подставив эти значения в однородное уравнение $x^2(x+2)^2 y'' - x(x^2-4)y' + x(x-2)y = 0$, имеем $x^2(x+2)^2 \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2} - x(x^2-4)\alpha\, x^{\alpha-1} + x(x-2)\, x^\alpha = 0$. Наибольшая степень x, содержащаяся в этом соотношении, равна $\alpha+2$. Приравняем нулю коэффициент при $x^{\alpha+2}$: $\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1 = (\alpha-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 1$. Подставив в однородное уравнение $y = x$, получаем неверное равенство $-x(x^2-4) + x^2(x-2) = 4x - 2x^2 = 0$, т.е. $y = x$ не подходит. Попытаемся найти частное решение в виде $y = x + a$. После подстановки в однородное уравнение получаем $-x(x^2-4) + x(x-2)(x+a) = 0$, т.е. $(x-2)(x+a) = x^2 - 4$, $x + a = x + 2$. Таким образом, $y_1(x) = x + 2$ - частное решение.

В нашем случае $-\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = \dfrac{x(x^2-4)}{x^2(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x(x+2)} = \dfrac{2x-(x+2)}{x(x+2)} = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x}$,

$\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x}\right)dx = 2\ln(x+2) - \ln x + c$ (из условия задачи видно, что $x > 0$),

$$\exp\left(2\ln(x+2) - \ln x\right) = e^{\ln(x+2)^2}\, e^{\ln x^{-1}} = (x+2)^2\, x^{-1} = \frac{(x+2)^2}{x}.$$

По формуле Лиувилля-Остроградского находим, что

$$\left(\frac{y}{x+2}\right)' = \frac{C(x+2)^2}{x(x+2)^2} = \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x+2} = C\int \frac{dx}{x} = C\ln x + C_1.$$

Умножив последнее равенство на $x+2$ и переобозначив $C = C_2$, получаем общее решение однородного уравнения

$$y_o(x) = C_1(x+2) + C_2(x+2)\ln x.$$

2. Неоднородное уравнение. Ищем общее решение в виде

$$y(x) = C_1(x)\,(x+2) + C_2(x)\,(x+2)\ln x.$$

Функции $C_1(x), C_2(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'\,(x+2) + C_2'\,(x+2)\ln x = 0, \\ C_1' + C_2'\left(\ln x + \dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{5(x+2)^3\ln^3 x}{x^2(x+2)^2}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на $(x+2)$ и вычтем его из второго уравнения системы. В результате приходим к равенству

$$C_2'\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{5(x+2)\ln^3 x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C_2' = \frac{5\ln^3 x}{x}, \;\; C_2(x) = 5\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = 5\int \ln^3 x\, d(\ln x) = \frac{5}{4}\ln^4 x + \tilde{C}_2.$$

Из первого уравнения системы находим

$$C_1' = -C_2'\ln x = -\frac{5\ln^4 x}{x}, \quad C_1(x) = -5\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = -5\int \ln^4 x\, d(\ln x) = -\ln^5 x + \tilde{C}_1.$$

Подставляя найденные $C_1(x), C_2(x)$ в формулу для общего решения $y(x)$ и снимая «волну» над произвольными постоянными, имеем

$$y(x) = \left(-\ln^5 x + C_1\right)(x+2) + \left(\frac{5}{4}\ln^4 x + C_2\right)(x+2)\ln x.$$

После приведения подобных получаем окончательный ответ

$$y = C_1(x+2) + C_2(x+2)\ln x + \frac{1}{4}(x+2)\ln^5 x.$$

Задача 42-4. Найти все решения уравнения

$$x^2y'' - x(8x-1)y' + 4x(4x-1)y = (4-x)e^{4x}, \quad x > 0.$$

Решение. 1. Однородное уравнение. Ищем частное решение в виде $y = e^{\alpha x}$, тогда $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$. Подставив эти значения в однородное уравнение $x^2y'' - x(8x-1)y' + 4x(4x-1)y = 0$ и сократив его на $e^{\alpha x}$, имеем $x^2\alpha^2 - x(8x-1)\alpha + 4x(4x-1) = 0$. Приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x, входящих в последнее соотношение. $\begin{cases} x^2:\ \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0, \\ x\ :\ \alpha - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4.$ Таким образом, $y_1(x) = e^{4x}$ - частное решение однородного уравнения.

В нашем случае $-\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = \dfrac{x(8x-1)}{x^2} = 8 - \dfrac{1}{x}$, $\displaystyle\int\left(8 - \frac{1}{x}\right)dx = 8x - \ln x + c$,

$e^{8x-\ln x} = e^{8x}\, e^{\ln x^{-1}} = e^{8x}\, x^{-1} = \dfrac{e^{8x}}{x}$. Согласно формуле Лиувилля-Остроградского находим, что

$$\left(\frac{y}{e^{4x}}\right)' = \frac{Ce^{8x}}{xe^{8x}} = \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{e^{4x}} = C\int\frac{dx}{x} = C\ln x + C_1.$$

Умножив последнее равенство на e^{4x} и переобозначив $C = C_2$, получаем общее решение однородного уравнения

$$y_o(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{4x}\ln x.$$

2. Неоднородное уравнение. Ищем общее решение в виде

$$y(x) = C_1(x)\,e^{4x} + C_2(x)\,e^{4x}\ln x.$$

Функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'\,e^{4x} + C_2'\,e^{4x}\ln x = 0, \\ 4C_1'e^{4x} + C_2'\left(4e^{4x}\ln x + \dfrac{e^{4x}}{x}\right) = \dfrac{(4-x)e^{4x}}{x^2}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 4 и вычтем его из второго уравнения системы. Сократив результат на e^{4x}, приходим к равенству

$$C_2'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(4-x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C_2' = \frac{4}{x} - 1, \quad C_2(x) = \int\left(\frac{4}{x} - 1\right)dx = 4\ln x - x + \tilde{C}_2\,.$$

Из первого уравнения системы находим $C_1' = -C_2'\ln x = \ln x - \dfrac{4\ln x}{x}$,

$$C_1(x) = \int\ln x\,dx - 4\int\frac{\ln x}{x}dx = x\ln x - \int dx - 4\int\ln x\,d(\ln x) = x\ln x - x - 2\ln^2 x + \tilde{C}_1\,.$$

Удобно сразу подсчитать частное решение неоднородного уравнения. Для этого подставим найденные $C_1(x), C_2(x)$ в формулу для $y(x)$, полагая при этом, что $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$.

$$y_ч(x) = \left(x\ln x - x - 2\ln^2 x\right)e^{4x} + \left(4\ln x - x\right)e^{4x}\ln x =$$
$$= \left(x\ln x - x - 2\ln^2 x + 4\ln^2 x - x\ln x\right)e^{4x} = \left(2\ln^2 x - x\right)e^{4x}.$$

По формуле $y(x) = y_o(x) + y_ч(x)$ получаем окончательный ответ

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{4x}\ln x + e^{4x}(2\ln^2 x - x)\,.$$

5. Экстремум функционала

Пусть задана функция $F(x, y, p)$, дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, и заданы числа $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$. Требуется исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx, \tag{1}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2}$$

Будем обозначать через $C^1([a,b])$ пространство всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций. Экстремум функционала (1) разыскивается на множестве функций, принадлежащих $C^1([a,b])$ и удовлетворяющих граничным условиям (2). Задача (1)-(2) называется задачей с двумя закрепленными концами или *простейшей задачей вариационного исчисления*.

Необходимым условием экстремума является уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad x \in [a,b]. \tag{3}$$

Экстремалью называется любое решение уравнения (3). *Допустимой экстремалью* называется решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Пусть $\hat{y}(x)$ - допустимая экстремаль и функция $h(x) \in C^1([a,b])$, $h(a) = h(b) = 0$. Рассмотрим приращение функционала $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Сумма всех линейных по h членов, входящих в ΔJ, образует первую вариацию функционала. На экстремали первая вариация равна нулю, поэтому при записи ΔJ можно учитывать только нелинейные по h члены. Наличие экстремума функционала при $y = \hat{y}(x)$ определяется по знаку ΔJ:

$\Delta J \ge 0 \Rightarrow$ min; $\Delta J \le 0 \Rightarrow$ max; ΔJ меняет знак в зависимости от h $\Rightarrow$ нет экстремума.

Если в приращение функционала входит член вида $\int_a^b \varphi(x)\, hh'dx$, где $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, то для определения знака ΔJ его нужно проинтегрировать по частям, используя равенство $hh' = \left(h^2\right)'/2$. То есть

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x)\, hh'dx &= \frac{1}{2}\int_a^b \varphi(x)\left(h^2\right)'dx = \frac{1}{2}\varphi(x)h^2(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \varphi'(x)\, h^2 dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(b)h^2(b) - \varphi(a)h^2(a)\right] - \frac{1}{2}\int_a^b \varphi'(x)\, h^2 dx. \end{aligned} \tag{4}$$

В случае простейшей вариационной задачи $h(a) = h(b) = 0$, поэтому

$$\int_a^b \varphi(x)\, hh'dx = -\frac{1}{2}\int_a^b \varphi'(x)\, h^2 dx.$$

Функционал с одним или двумя свободными концами

1) Если граничное условие задано только на одном конце отрезка $[a,b]$, то этот конец называется закреплённым, в другой конец – *свободным*. Необходимыми условиями экстремума являются уравнение Эйлера (3) и дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{на } \textbf{свободном} \text{ конце,}$$

которое называется *условием трансверсальности.*

2) При рассмотрении приращения $\Delta J = J\left(\hat{y}+h\right) - J\left(\hat{y}\right)$ функция $h(x) \in C^1([a,b])$ берётся равной нулю только на **закреплённом** конце, что учитывается при преобразованиях (4).

Если функционал (1) рассматривается без граничных условий, т.е. оба конца свободные, то необходимыми условиями экстремума являются уравнение Эйлера (3) и граничные условия трансверсальности на обоих концах отрезка $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(a, y(a), y'(a)\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}\left(b, y(b), y'(b)\right) = 0.$$

При рассмотрении приращения $\Delta J = J\left(\hat{y}+h\right) - J\left(\hat{y}\right)$ функция $h(x) \in C^1([a,b])$ не полагается равной нулю на каком-либо конце отрезка и в равенстве (4) учитываются все члены.

Уравнение Эйлера

При решении задач на экстремум функционала часто возникают уравнения, которые можно привести к виду

$$\alpha_0 x^2 y'' + \alpha_1 x y' + \alpha_2 y = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{5}$$

где $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \alpha_2$ - заданные действительные числа, $f(x)$ - заданная непрерывная на $[a,b]$ функция. Уравнение (5) также носит название уравнения Эйлера. Будем считать, что $a > 0$.

Уравнение (5) сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены $x = e^t$, где t - новая независимая переменная. Характеристический многочлен полученного уравнения имеет вид

$$\alpha_0 \lambda\left(\lambda - 1\right) + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = \alpha_0 \lambda^2 + \left(\alpha_1 - \alpha_0\right)\lambda + \alpha_2.$$

По известному характеристическому многочлену записываем преобразованное уравнение

$$\alpha_0 \, y'' + \left(\alpha_1 - \alpha_0\right) y' + \alpha_2 y = f\left(e^t\right),$$

в котором штрихи означают дифференцирование по переменной t.

Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене

Задача 41-5. Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y) = \int\limits_{7\pi/4}^{11\pi/6} \left(y'\right)^2 \operatorname{tg} x \, dx, \quad y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ln 2, \quad y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2\ln 2.$$

Решение. Составим уравнение Эйлера.

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \operatorname{tg} x, \quad \left(y' \operatorname{tg} x\right)' = 0$ - уравнение Эйлера, из него находим $y' \operatorname{tg} x = C,$

$$y' = C \operatorname{ctg} x, \quad y(x) = C\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = C\int \frac{d \sin x}{\sin x} = C \ln|\sin x| + C_1.$$

Теперь учтем граничные условия

$$\begin{cases} C\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+C_1=-\ln 2, \\ C\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+C_1=-2\ln 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{C}{2}\ln 2+C_1=-\ln 2, \\ -C\ln 2+C_1=-2\ln 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C=2,\ C_1=0.$$

$\hat{y}(x)=2\ln(-\sin x)$ - допустимая экстремаль.

Пусть функция $h(x)\in C^1\left(\left[7\pi/4, 11\pi/6\right]\right)$, $h(7\pi/4)=h(11\pi/6)=0$. Рассмотрим приращение функционала $\Delta J=J\left(\hat{y}+h\right)-J\left(\hat{y}\right)$. Так как $\operatorname{tg} x<0$ при $x\in\left[7\pi/4, 11\pi/6\right]$, то

$$\Delta J=\int\limits_{7\pi/4}^{11\pi/6}\left(h'\right)^2\operatorname{tg} x\,dx\le 0 \quad\Rightarrow\quad \max.$$

Ответ: функционал имеет максимум на $\hat{y}(x)=2\ln(-\sin x)$.

Задача 42-5. Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int\limits_{4\pi/3}^{3\pi/2}\left(y'\right)^2\sin x\,dx, \quad y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\ln 3, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$

Решение. Составим уравнение Эйлера.

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'\sin x$, $\left(y'\sin x\right)'=0$ - уравнение Эйлера, из него находим $y'\sin x=C$,

$$y'=\frac{C}{\sin x},\quad y(x)=C\int\frac{dx}{\sin x}=C\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=C\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=\left|t=\cos x\right|=\tilde{C}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$=\tilde{C}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C_1.$ Теперь учтем граничные условия

$$\begin{cases} \tilde{C}\ln\left(\dfrac{1+1/2}{1-1/2}\right)+C_1=\ln 3, \\ \tilde{C}\ln\left(\dfrac{1-0}{1+0}\right)+C_1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{C}\ln 3+C_1=\ln 3, \\ C_1=0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \tilde{C}=1,\ C_1=0.$$

$\hat{y}(x)=\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ - допустимая экстремаль.

Пусть функция $h(x)\in C^1\left(\left[4\pi/3, 3\pi/2\right]\right)$, $h(4\pi/3)=h(3\pi/2)=0$. Рассмотрим приращение функционала $\Delta J=J\left(\hat{y}+h\right)-J\left(\hat{y}\right)$. Так как $\sin x<0$ при $x\in\left[4\pi/3, 3\pi/2\right]$, то

$$\Delta J=\int\limits_{4\pi/3}^{3\pi/2}\left(y'\right)^2\sin x\,dx\le 0 \quad\Rightarrow\quad \max.$$

Ответ: функционал имеет максимум на $\hat{y}(x)=\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$.

Для более полного изучения темы об экстремумах функционала решим дополнительную задачу.

Задача. Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int_1^2\left[x^2\left(y'\right)^2-2xyy'+y^2+6xy\right]dx,\quad y(2)=\frac{1}{12}+2\ln 2.$$

Решение. Составим уравнение Эйлера.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2xy'+2y+6x,\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=2x^2y'-2xy,\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial y}\quad\Rightarrow$$

$2x^2y''+4xy'-2y-2xy'=-2xy'+2y+6x$, то есть

$$x^2y''+2xy'-2y=3x.$$

Получили уравнение Эйлера. Сделаем замену $x=e^t$. Характеристический многочлен уравнения после замены

$$\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=\lambda^2+\lambda-2.$$

В соответствии с ним запишем линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y''+y'-2y=3e^t, \tag{6}$$

в котором штрихи означают дифференцирование по t.

Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)=0,\quad \lambda_1=1, \lambda_2=-2.$

Общее решение однородного уравнения $y_o(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}$.

Поскольку имеет место резонанс кратности 1, то частное решение (6) ищем в виде $y=ate^t$, тогда $y'=a(1+t)e^t$, $y''=a(2+t)e^t$. Подставив эти значения в (6), находим

$$a(2+t+1+t-2t)=3, a=1,\ y_ч=te^t.$$

Таким образом, общее решение (6) есть

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}+te^t.$$

Вернувшись к переменной x, получаем общее решение исходного уравнения Эйлера

$$y(x)=C_1x+\frac{C_2}{x^2}+x\ln x. \tag{7}$$

При $x=1$ граничное условие не задано, это свободный конец отрезка. Следовательно, на нём ставится дополнительное граничное условие

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1}=0,\quad\Rightarrow\quad \left.\left(2x^2y'-2xy\right)\right|_{x=1}=0,\quad y'(1)-y(1)=0.$$

Из (7) находим $y'(x)=C_1-\dfrac{2C_2}{x^3}+\ln x+1,\quad y'(1)=C_1-2C_2+1.$

Запишем систему из двух граничных условий

$$\begin{cases}C_1-2C_2+1-C_1-C_2=0, & \Rightarrow\quad C_2=1/3,\\ 2C_1+\dfrac{C_2}{4}+2\ln 2=\dfrac{1}{12}+2\ln 2, & \end{cases}\quad\Rightarrow\quad C_1=0.$$

$\hat{y}(x)=\dfrac{1}{3x^2}+x\ln x$ - допустимая экстремаль.

Пусть функция $h(x)\in C^1([1,2])$, $h(2)=0$. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J = J\left(\hat{y}+h\right) - J\left(\hat{y}\right) = \int_{1}^{2} \left[x^2 \left(h'\right)^2 - 2xhh' + h^2 \right] dx . \tag{8}$$

Используя интегрирование по частям, преобразуем интеграл

$$\int_{1}^{2} \left(-2xhh'\right) dx = -\int_{1}^{2} x\left(h^2\right)' dx = -xh^2(x)\Big|_{1}^{2} + \int_{1}^{2} h^2(x)\,dx = h^2(1) + \int_{1}^{2} h^2(x)\,dx .$$

Подставив найденное значение в (8), получаем окончательную формулу для приращения функционала

$$\Delta J = \int_{1}^{2} \left[x^2 \left(h'\right)^2 + 2h^2 \right] dx + h^2(1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \min .$$

Ответ: функционал имеет минимум на $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{3x^2} + x\ln x$.

6. Задача Коши для уравнений, допускающих понижение порядка

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\varphi(x, y, y')y'' + g(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b. \tag{2}$$

Здесь φ, g – заданные функции, причем $\varphi(x_0, a, b) \neq 0$ и функции $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}, g, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности точки (x_0, a, b). Из общей теории следует, что решение задачи (1)-(2) существует и единственно на некотором отрезке $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.

Таким образом, решение уравнения (1) всегда зависит от двух произвольных постоянных, которые однозначно определяются по начальным условиям (2). Первую постоянную C_1 рекомендуется определять сразу после её появления, поскольку это упрощает дальнейшие выкладки.

Замечание. В ответе должно быть указано **только одно** решение задачи Коши. К примеру, нельзя давать ответ $y^2 = 3x + 1$, нужно точно выбрать $y = \sqrt{3x+1}$ или $y = -\sqrt{3x+1}$.

Методы понижения порядка

Для краткости запишем уравнение (1) в виде $F(x, y, y', y'') = 0$ и рассмотрим для него два основных метода понижения порядка.

1. Уравнение называется однородным по y и его производным, если оно не изменяется при одновременной замене y на ky, y' на ky', y'' на ky'', то есть

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^s F(x, y, y', y'') \quad \forall k > 0, \text{ где } s \text{ - степень однородности.}$$

В этом случае порядок уравнения понижается заменой $y' = z(x)y$, где $z(x)$ - новая искомая функция. Вторая производная заменяется по правилу $y'' = (zy)' = z'y + zy' = (z' + z^2)y$. После замены уравнение сокращается на y^s. Из (2) вытекает начальное условие $z(x_0) = b/a$.

2. Если уравнение не содержит явно независимую переменную x, то есть имеет вид $F(y, y', y'') = 0$, то порядок понижается заменой $y' = p(y)$, где y – новая независимая переменная, $p(y)$ – новая искомая функция. При этом $y'' = \dfrac{dp(y)}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\,p'$. Из (2) следует начальное условие $p(a) = b$.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1 порядка, которое можно представить в виде

$$y' + \alpha(x)y + \beta(x)y^n = 0, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{R}, n \neq 1, n \neq 0$; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – заданные непрерывные функции.

Разделив (3) на y^n, получаем уравнение $\dfrac{y'}{y^n} + \dfrac{\alpha(x)}{y^{n-1}} + \beta(x) = 0.$

Сделаем замену $u = \dfrac{1}{y^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad u' = -(n-1)\dfrac{y'}{y^n}, \quad \dfrac{y'}{y^n} = -\dfrac{1}{n-1}u'.$

В результате (3) сводится к линейному уравнению

$$-\frac{1}{n-1}u'+\alpha(x)u+\beta(x)=0.$$

Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене

Задача 41-6. Решить задачу Коши

$$\left(x^2-2x\right)yy''+\left(3x-4\right)yy'-x\left(x^2-3x+2\right)\left(y'\right)^2=0\,,\quad y(3)=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ y'(3)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\,.$$

Решение. Уравнение является однородным по y и его производным.

Замена $y'=z(x)y \Rightarrow y''=(z'+z^2)y$. Подставив эти формулы в уравнение, имеем

$$\left(x^2-2x\right)y^2(z'+z^2)+\left(3x-4\right)y^2z-x\left(x^2-3x+2\right)y^2z^2=0\,.$$

Сократим на y^2, так как $y=0$ не подходит по начальным условиям,

$$\left(x^2-2x\right)(z'+z^2)+\left(3x-4\right)z-x\left(x^2-3x+2\right)z^2=0\,.$$

Порядок понижен. Теперь подсчитаем коэффициент при z^2:

$$x^2-2x-x^3+3x^2-2x=-x^3+4x^2-4x=-x(x^2-4x+4)=-x(x-2)^2\,.$$

Таким образом, получаем уравнение Бернулли

$$\left(x^2-2x\right)z'+\left(3x-4\right)z-x\left(x-2\right)^2z^2=0\,.$$

Поделим его на z^2, так как из начальных условий $z(3)=1/3\neq 0$,

$\left(x^2-2x\right)\dfrac{z'}{z^2}+\left(3x-4\right)\dfrac{1}{z}-x\left(x-2\right)^2=0$. Сделаем стандартную замену $u=\dfrac{1}{z}$, тогда $u'=-\dfrac{z'}{z^2}$,

уравнение сводится к линейному

$-\left(x^2-2x\right)u'+\left(3x-4\right)u-x\left(x-2\right)^2=0$ или

$$x(x-2)u'-(3x-4)\,u=-x(x-2)^2. \qquad (4)$$

Решение линейного уравнения (4) найдем по методу вариации постоянной.

1. Решаем линейное однородное уравнение. $x(x-2)u'-(3x-4)\,u=0$. Разделяем переменные

$x(x-2)\dfrac{du}{dx}=(3x-4)\,u$, $\dfrac{du}{u}=\dfrac{(3x-4)}{x(x-2)}dx=\dfrac{x+2(x-2)}{x(x-2)}dx=\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}\right)dx$. Проинтегрировав,

получаем $\ln|u|=\ln|x-2|+2\ln|x|+\hat{C}$, $u=C(x-2)x^2$.

2. Неоднородное: $u=C(x)(x-2)x^2$, $u'=C'(x)(x-2)x^2+C(x)(3x^2-4x)$

подставим эти равенства в (4)

$x(x-2)\left[C'(x-2)x^2+C(3x^2-4x)\right]-(3x-4)\;C(x-2)x^2=-x(x-2)^2$,

$$x^3(x-2)^2C'=-x(x-2)^2,\qquad C'=-\frac{1}{x^2},\qquad C(x)=\frac{1}{x}+C_1.$$

Таким образом,

$$u=C(x)(x-2)x^2=\left(\frac{1}{x}+C_1\right)(x-2)x^2=\left(1+C_1x\right)(x-2)x.$$

Тогда

$$z(x)=\frac{1}{u}=\frac{1}{\left(1+C_1x\right)(x-2)x}\;,\qquad y'=z(x)y=\frac{y}{\left(1+C_1x\right)(x-2)x}\,.$$

Постоянную C_1 найдем из начальных условий, полагая в последнем равенстве $x=3$, т.е.

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}\left(1+3C_1\right)(3-2)3} \Rightarrow C_1=0, \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{(x-2)x},$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{(x-2)x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

Проинтегрировав, имеем $\ln|y|=\frac{1}{2}\left(\ln|x-2|-\ln|x|\right)+\hat{C}_2$, $y=C_2\sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

Здесь мы учли, что решаем задачу в окрестности $x=3$, поэтому модуль под корнем можно не ставить. Постоянную C_2 найдем из первого начального условия:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=C_2\sqrt{\frac{3-2}{3}} \Rightarrow C_2=1, \qquad y=\sqrt{\frac{x-2}{x}}.$$

Ответ: $y=\sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

Задача 42-6. Решить задачу Коши

$$2\left(y+2\right)y''+\left(2y-1\right)\left(y'\right)^4=\left(y'\right)^2, \quad y\left(5\right)=7,\ y'\left(5\right)=\frac{1}{2}.$$

Решение. Уравнение не содержит явно независимую переменную *x*.
Замена $y'=p(y) \Rightarrow y''=pp'$, где *y* – новая независимая переменная. Из начальных условий следует, что $p(7)=1/2$. После подстановки формул для y' и y'' исходное дифференциальное уравнение принимает вид

$$2\left(y+2\right)pp'+\left(2y-1\right)p^4=p^2.$$

Сократив его на p (значение $p=0$ не подходит по начальным условиям), получаем уравнение Бернулли

$$2\left(y+2\right)p'+\left(2y-1\right)p^3=p.$$

Стандартная замена $u=\frac{1}{p^2}$, $u'=-\frac{2}{p^3}p'$.

Уравнение $\frac{2\left(y+2\right)p'}{p^3}+2y-1=\frac{1}{p^2}$ переходит в уравнение $-\left(y+2\right)u'+2y-1=u$ или $\left(y+2\right)u'+u=2y-1$ – неоднородное линейное уравнение первого порядка относительно u, которое решаем методом вариации постоянной.

1) Сначала решаем однородное уравнение: $\left(y+2\right)u'+u=0$ – переменные разделяются.

$$\left(y+2\right)\frac{du}{dy}=-u, \ \frac{du}{u}=-\frac{dy}{y+2} \quad \text{дает} \quad \ln|u|=-\ln|y+2|+C_0 \quad \text{и} \quad u=\frac{C}{y+2}.$$

2) Полагая $C=C\left(y\right)$, подставляем $u=\frac{C\left(y\right)}{y+2}$, $u'=\frac{C'\left(y\right)}{y+2}-\frac{C\left(y\right)}{(y+2)^2}$ в линейное неоднородное уравнение: $\left(y+2\right)\left[\frac{C'}{y+2}-\frac{C}{(y+2)^2}\right]+\frac{C}{y+2}=2y-1$, что дает $C'=2y-1$,

т.е. $C\left(y\right)=\int(2y-1)\,dy=y^2-y+C_1$.

3) Используя найденное значение $C\left(y\right)$, получаем

$$u=\frac{y^2-y+C_1}{y+2}\text{, т.е. } p^2(y)=\frac{1}{u}=\frac{y+2}{y^2-y+C_1} \quad \Rightarrow \quad \left(y'\right)^2=\frac{y+2}{y^2-y+C_1}.$$

Для определения постоянной C_1 используем начальные условия $y\left(5\right)=7,\ y'\left(5\right)=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{4}=\frac{7+2}{49-7+C_1},\ 42+C_1=36,\ C_1=-6,\ \left(y'\right)^2=\frac{y+2}{y^2-y-6}=\frac{y+2}{(y+2)(y-3)}=\frac{1}{y-3}$$

и

$y'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}$, так как $y'>0$ при $x=5$, то выбираем знак плюс: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}$ – уравнение с разделяющимися переменными, т.е. $\sqrt{y-3}\,dy=dx$ и $\dfrac{2}{3}(y-3)^{3/2}=x+\hat{C}_2,\ (y-3)^{3/2}=\dfrac{3}{2}x+C_2$.

Подставляя сюда начальное значение $y(5)=7$, имеем $8=\dfrac{15}{2}+C_2$, отсюда $C_2=\dfrac{1}{2}$ и

$(y-3)^{3/2}=\dfrac{3x+1}{2}$, то есть $y=3+\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)^{2/3}$.

Ответ: $y=3+\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)^{2/3}$.

7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F\left(x, y, y'\right)=0, \tag{1}$$

где F – заданная функция, непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^3$.

Решение (1) находится по *методу введения параметра*:

1. Пусть из (1) можно выразить y или x, т.е. записать уравнение в виде

$$y=f\left(x, y'\right) \tag{2}$$

или $x=f\left(y, y'\right)$. (2а)

2. Введем параметр $p=y'=\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy=p\,dx,\ dx=\dfrac{dy}{p}$ и представим уравнение как

$$y=f\left(x, p\right) \tag{3}$$

или $x=f\left(y, p\right)$. (3а)

3. Возьмем полный дифференциал от обеих частей (3), заменив $dy=p\,dx$, либо возьмем полный дифференциал от обеих частей (3а) и заменим $dx=\dfrac{dy}{p}$. В результате получим

$$pdx=\frac{\partial f(x, p)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x, p)}{\partial p}dp \tag{4}$$

или $\dfrac{dy}{p}=\dfrac{\partial f(y, p)}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f(y, p)}{\partial p}dp$. (4а)

4. Найдем решение (4) и **подставим его в (3)**.

а) Если решение (4) найдено в виде $p=p(x)$, то, подставляя его в равенство $y=f\left(x, p\right)$, сразу получаем $y=f\left(x, p(x)\right)$ – решение уравнения (1).

б) Если решение (4) найдено в виде $x=x(p)$, то после подстановки в (3) получим решение (1) как функцию, заданную параметрически $\begin{cases} x=x(p), \\ y=f\left(\,x(p), p\right). \end{cases}$ Далее нужно исключить из этой системы параметр p и получить решение уравнения (1) в явном виде.

Аналогично решение уравнения (4а) нужно подставить в равенство (3а).

Замечание. В некоторых задачах удобно вводить параметр $p=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{dx}{dy}$, тогда $dx=pdy$, $dy=\dfrac{dx}{p}$.

Определение. Функция $y=y_o(x)$ называется *особым решением* уравнения (1) на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если:

1) она является решением (1) на этом промежутке;

2) при каждом $x_0 \in I$ графика функции $y=y_o(x)$ касается график другого решения (1), отличного от $y_o(x)$ в сколь угодно малой окрестности x_0.

Дискриминантной кривой уравнения (1) называется геометрическое место точек на плоскости (x, y), для которых разрешима система

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Из общей теории следует, что все особые решения уравнения (1) лежат на его дискриминантной кривой.

Процесс решения экзаменационной задачи содержит четыре обязательных этапа:

1. Решить уравнение (1).

2. Найти дискриминантную кривую, исключив параметр p из системы (5), и отобрать те решения уравнения (1), которые лежат на дискриминантной кривой.

3. Для отобранных решений проверить выполнение определения особого решения, т.е. проверить выполнение условий касания $\begin{cases} y_o(x)=y(x,C) \\ y_o'(x)=y'(x,C) \end{cases}$, где $y(x,C)$ - семейство решений (1), не совпадающих с $y_o(x)$.

4. Нарисовать интегральные кривые уравнения. На чертеже необходимо изобразить особое решение и показать, каким образом его графика касаются графики других решений уравнения.

<u>Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене</u>

Задача 41-7. Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$3(y')^4+4\left[(y')^3+y+x\right]=0.$$

Решение. I. Решим уравнение. Выразим y из исходного уравнения

$$y=-x-(y')^3-\frac{3}{4}(y')^4.$$

Введем параметр $p=y'=\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow dy=p\,dx$, уравнение принимает вид

$$y=-x-p^3-\frac{3}{4}p^4. \qquad (6)$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей (6) и заменим $dy=p\,dx$

$pdx=-dx-3p^2dp-3p^3dp$, откуда $(p+1)dx=-3p^2(1+p)dp$ или $(p+1)\left(dx+3p^2dp\right)=0$.

Возможны два случая:

1) $p+1=0,\ \ p=-1$, подставим это значение p в (6):

$y=-x-(-1)^3-\dfrac{3}{4}(-1)^4=-x+1-\dfrac{3}{4}$, т.е. $y=-x+\dfrac{1}{4}$.

2) $dx+3p^2dp=0,\ \ x+p^3=C,\ \ p=(C-x)^{1/3}$, подставим это значение p в (6):

$y=-x-(C-x)-\dfrac{3}{4}(C-x)^{4/3}=-C-\dfrac{3}{4}(C-x)^{4/3}$, т.е. $y=C-\dfrac{3}{4}(C+x)^{4/3}$.

Здесь мы переобозначили за C произвольную постоянную $-C$.

II. Найдем дискриминантную кривую. Запишем систему

$$\begin{cases} 3p^4+4\left[p^3+y+x\right]=0, \\ 12p^3+12p^2=0, \quad \Rightarrow \quad p^2(p+1)=0,\ \ p=0 \ \text{ или } \ p=-1. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения p в первое уравнение системы, имеем

$p=0,\ y+x=0,\ y=-x$ не является решением уравнения;

$p=-1,\ 3+4\left(-1+y+x\right)=0,\ y_o=-x+1/4$ может быть особым решением.

Таким образом, мы установили, что дискриминантная кривая представляет собой объединение прямых $y=-x$ и $y=-x+1/4$. Только $y_o=-x+1/4$ может быть особым решением. Никаких других особых решений уравнение иметь не может, так как каждое особое решение обязано лежать на дискриминантной кривой.

III. Проверка касания (доказательство того, что решение является особым). Запишем условия касания

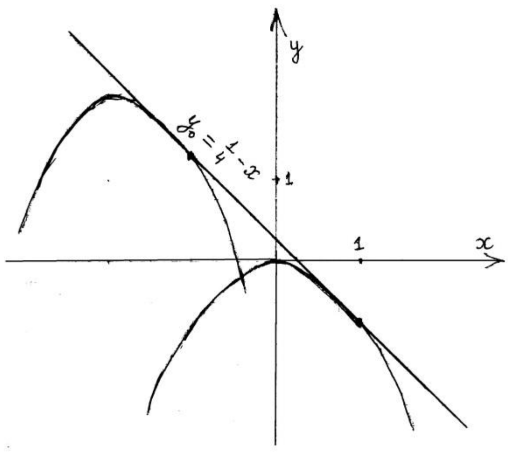
$$\begin{cases} -x+\dfrac{1}{4}=C-\dfrac{3}{4}\left(C+x\right)^{4/3}, \\ -1=-\left(C+x\right)^{1/3}, \qquad \Rightarrow \quad C+x=1,\ C=1-x. \end{cases}$$

Поставим значение $C=1-x$ в первое уравнение системы:

$-x+\dfrac{1}{4}=1-x-\dfrac{3}{4}\left(1-x+x\right)^{4/3}$, т.е. $-x+\dfrac{1}{4}=1-x-\dfrac{3}{4}$ – верно при любом $x\in\mathbb{R}$.

Таким образом, $y_o=-x+1/4$ – особое решение, в каждой точке x_0 графика y_o касается график решения $y=C-\dfrac{3}{4}\left(C+x\right)^{4/3}$ при $C=1-x_0$.

IV. Нарисуем интегральные кривые уравнения. График особого решения $y_o=-x+1/4$ мы можем провести точно. Графики решений $y(x)=C-\dfrac{3}{4}\left(C+x\right)^{4/3}$ можем изобразить лишь приблизительно, приняв во внимание качественные характеристики:



$y(x)$ имеет максимум $y=C$ при $x=-C$ (вершина параболы);

график симметричен относительно вертикальной прямой $x=-C$;

график касается прямой $y=-x+1/4$ при $x=1-C$;

при больших значениях $x\to\infty$ функция $y(x)$ убывает быстрее, чем линейная.

Задача 42-7. Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$2y'-2\ln y'+y-x=0.$$

Решение. I. Решим уравнение. Выразим y из исходного уравнения

$$y=x+2\ln y'-2y'.$$

Введем параметр $p=y'=\dfrac{dy}{dx}\ \Rightarrow\ dy=p\,dx$, тогда уравнение принимает вид

$$y=x+2\ln p-2p. \qquad (7)$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей (7) и заменим $dy=p\,dx$

$pdx = dx + 2\dfrac{dp}{p} - 2dp$, откуда $(p-1)dx = -\dfrac{2}{p}(p-1)dp$ или $(p-1)\left(dx + \dfrac{2}{p}dp\right) = 0$.

Возможны два случая:

1) $p-1=0,\ \ p=1$, подставим это значение p в (7):

$y = x-2$.

2) $dx + \dfrac{2}{p}dp = 0,\ \ x + 2\ln p = C,\ \ \ln p = \dfrac{C-x}{2},\ \ p = e^{(C-x)/2}$. Здесь мы учли, что по условию $p>0$. Подставим найденное значение p в (7):

$y = x + 2\ln e^{(C-x)/2} - 2e^{(C-x)/2} = x + C - x - 2e^{(C-x)/2}$, т.е. $y = C - 2e^{(C-x)/2}$.

II. Найдем дискриминантную кривую. Запишем систему

$$\begin{cases} 2p - 2\ln p + y - x = 0, \\ 2 - \dfrac{2}{p} = 0, \qquad\qquad \Rightarrow \quad p = 1. \end{cases}$$

Подставляя значение $p=1$ в первое уравнение системы, имеем

$2 + y - x = 0,\ \ y_o = x-2$ может быть особым решением, так как является решением уравнения. Дискриминантная кривая представляет собой прямую $y = x-2$. Других особых решений уравнение иметь не может, так как каждое особое решение должно лежать на дискриминантной кривой.

III. Проверка касания.

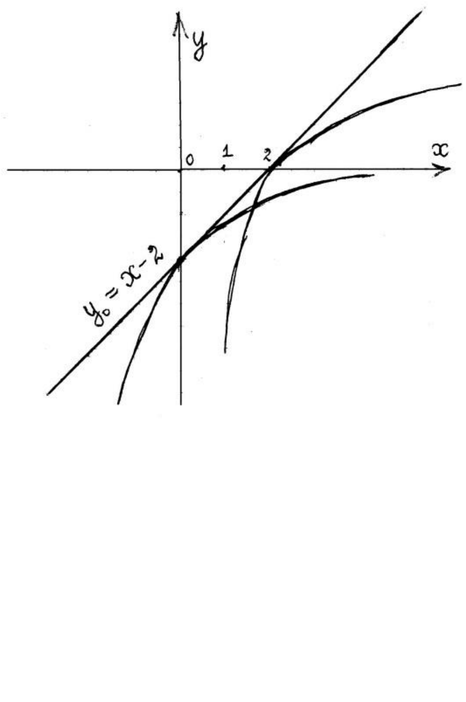
$$\begin{cases} x - 2 = C - 2e^{(C-x)/2}, \\ 1 = e^{(C-x)/2}, \qquad \Rightarrow \quad C - x = 0,\ \ C = x. \end{cases}$$

Поставим значение $C = x$ в первое уравнение системы:

$x - 2 = x - 2e^{(x-x)/2}$, т.е. $x-2 = x-2$ – верное тождество при любом $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $y_o = x-2$ – особое решение, в каждой точке x_0 графика y_o касается график решения $y = C - 2e^{(C-x)/2}$ при $C = x_0$.

IV. Нарисуем интегральные кривые уравнения. График особого решения $y_o = x-2$ мы можем построить точно. Графики решений $y(x) = C - 2e^{(C-x)/2}$ можем изобразить лишь приблизительно, приняв во внимание качественные характеристики:



$y(x)$ возрастает, $y(C) = C-2$, $y(x) \to C$ при $x \to +\infty$;

график касается прямой $y = x-2$ при $x = C$;

график $y(x)$ лежит ниже прямой $y = x-2$, поскольку $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$, следовательно,

$y(x) < C - 2\left(1 + \dfrac{C-x}{2}\right) = x - 2$ при $x \neq C$;

$y(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$.

8. Уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+f_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \tag{1}$$

где f_1, f_2, f_3 – заданные непрерывно дифференцируемые в области $G\subset\mathbb{R}^3$ функции, причем $\sum_{k=1}^{3}|f_k(x,y,z)|\neq 0$ в каждой точке G.

Характеристической системой уравнения (1) называется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y,z),\quad \frac{dy}{dt}=f_2(x,y,z),\quad \frac{dz}{dt}=f_3(x,y,z), \tag{2}$$

в которой t играет роль независимой переменной.

Непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y,z)$ называется *первым интегралом* системы (2), если она остается постоянной вдоль каждого решения (2). Если есть несколько первых интегралов $u_1(x,y,z),\ldots,u_m(x,y,z)$, то любая их непрерывно дифференцируемая функция $u=F\left(u_1(x,y,z),\ldots,u_m(x,y,z)\right)$ также будет первым интегралом (2). Поэтому принято различать независимые первые интегралы. Известно, что система (2) имеет в окрестности каждой точки области G ровно два независимых первых интеграла.

Функция $u(x,y,z)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она является первым интегралом характеристической системы (2).

По условию функции f_1, f_2, f_3 не могут одновременно обращаться в нуль ни в одной точке области G. Пусть $f_3\neq 0$, тогда в окрестности данной точки мы можем поделить первые два уравнения системы (2) на третье уравнение и записать её в виде

$$\frac{dx}{dz}=\frac{f_1(x,y,z)}{f_3(x,y,z)},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{f_2(x,y,z)}{f_3(x,y,z)},$$

исключив из системы переменную t и взяв z за новую независимую переменную.

Обычно характеристическую систему уравнения (1) записывают в симметрической форме

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)}=\frac{dy}{f_2(x,y,z)}=\frac{dz}{f_3(x,y,z)}. \tag{3}$$

В этой записи из системы исключается t, но не конкретизируется, какая из переменных x, y, z берётся за независимую переменную, поэтому в уравнения входят не производные, а дифференциалы. Такая запись компактна и облегчает поиск первых интегралов. Вместе с тем, она является формальной. При выписывании системы (3) мы не принимаем во внимание тот факт, что в некоторых точках области знаменатели дробей, входящих в (3), могут обращаться в нуль.

Определение. Пусть $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$ независимые первые интегралы (3) (или (2)). *Общим решением* уравнения (1) называется

$$u=F\left(u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)\right), \tag{4}$$

где F – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Для отыскания первых интегралов часто используется следующее утверждение

Лемма 1 (свойство равных дробей). Если верно (3), то при любых k_1, k_2, k_3 таких, что $k_1\, f_1(x,y,z)+k_2\, f_2(x,y,z)+k_3\, f_3(x,y,z)\neq 0$, имеет место равенство

$$\frac{k_1\,dx+k_2\,dy+k_3\,dz}{k_1\, f_1(x,y,z)+k_2\, f_2(x,y,z)+k_3\, f_3(x,y,z)}=\frac{dx}{f_1(x,y,z)}=\frac{dy}{f_2(x,y,z)}=\frac{dz}{f_3(x,y,z)}\,, \qquad (5)$$

где k_1, k_2, k_3 – числа или функции от x, y, z.

Доказательство. Обозначим $q=\dfrac{dx}{f_1}=\dfrac{dy}{f_2}=\dfrac{dz}{f_3} \quad\Rightarrow\quad dx=q\,f_1,\ dy=q\,f_2,\ dz=q\,f_3$, тогда

$\dfrac{k_1\,dx+k_2\,dy+k_3\,dz}{k_1\,f_1+k_2\,f_2+k_3\,f_3}=\dfrac{k_1\,q\,f_1+k_2\,q\,f_2+k_3\,q\,f_3}{k_1\,f_1+k_2\,f_2+k_3\,f_3}=q$, что и даёт (5).

<u>Вычисление первых интегралов</u>

1. <u>Случай двух независимых переменных</u>. Рассмотрим уравнение в дифференциалах

$$\frac{dx_1}{g_1\left(x_1,x_2\right)}=\frac{dx_2}{g_2\left(x_1,x_2\right)}\,. \qquad (6)$$

Найдем его решение $\Phi\left(x_1,x_2,C\right)=0$ и выразим из последнего равенства произвольную постоянную $C=\varphi\left(x_1,x_2\right)$. Тогда $u=\varphi\left(x_1,x_2\right)$ – первый интеграл (6).

2. <u>Случай трех независимых переменных</u>. Выделим из исходной системы (3) уравнение вида (6), где x_1, x_2 – какие-либо две из независимых переменных x, y, z или $x_1=x_1(x,y,z)$, $x_2=x_2(x,y,z)$ – функции от x, y, z. Решив (6), найдем первый интеграл $u_1=\varphi_1(x, y, z)$. Для отыскания ещё одного независимого первого интеграла рассмотрим два способа.

а) Из равенства $u_1=\varphi_1(x, y, z)$ выразим одну из независимых переменных и подставим это выражение в (3). В результате получим систему с двумя независимыми переменными, из которой найдем u_2.

б) Используя лемму 1, получим из системы (3) другое уравнение вида (6). Решив его, найдем еще один первый интеграл $u_2=\varphi_2(x, y, z)$.

<u>Задача Коши для уравнения (1)</u>

Пусть уравнение $g(x,y,z)=0$ определяет в области G гладкую поверхность S и пусть в окрестности S задана непрерывно дифференцируемая функция $v(x,y,z)$.

Задача Коши:

Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее *начальному условию*

$$u=v(x,y,z) \text{ на } S\,.$$

Если известно общее решение уравнения (1), то решить задачу Коши можно следующим способом. Используя уравнение поверхности, выразим x, y, z как функции первых интегралов u_1, u_2, то есть

$$\begin{cases} g\left(x,y,z\right)=0, \\ u_1\left(x,y,z\right)=u_1, \\ u_2\left(x,y,z\right)=u_2, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=w_1(u_1,u_2),\ \ y=w_2(u_1,u_2),\ \ z=w_3(u_1,u_2).$$

На основании этих выражений представим

$$\hat{u}=v(x,y,z)=v\left(w_1(u_1,u_2),\, w_2(u_1,u_2),\, w_3(u_1,u_2)\right)\equiv F_0(u_1,u_2)\,.$$

Вне поверхности S продолжим $\hat{u}$ по той же формуле. В результате получим функцию $\hat{u} = F_0(u_1(x, y, z),\ u_2(x, y, z))$, которая и дает решение задачи Коши.

Примеры решения задач, предлагавшихся на письменном экзамене

Задача 41-8. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\left[x(y-5z)^2+z\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{5}\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad u = xz^5 \text{ при } y = 5z+1,\ x>0.$$

Решение. Запишем характеристическую систему

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{x(y-5z)^2+z}=\frac{5\,dz}{z}.$$

Рассмотрев первую и последнюю дроби, получаем уравнение, которое содержит только две независимые переменные

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{5\,dz}{z} \quad\Rightarrow\quad 5\ln|z|=\ln|x|+\hat{C}$, отсюда $z^5 = Cx$. Выражая произвольную постоянную C, находим $u_1 = \dfrac{z^5}{x}$ – первый интеграл.

Рассмотрим два способа для отыскания ещё одного первого интеграла.

Первый способ построения u_2. Выразим $x = z^5/u_1$ и подставим это значение в уравнение $\dfrac{dy}{x(y-5z)^2+z}=\dfrac{5\,dz}{z}$. Сократив на z, получим $dy=5\left[\dfrac{z^4}{u_1}(y-5z)^2+1\right]dz$. Далее преобразуем $d\left(y-5z\right)=5\dfrac{z^4}{u_1}(y-5z)^2dz,\quad \dfrac{d\left(y-5z\right)}{(y-5z)^2}=\dfrac{5z^4dz}{u_1}$. Решаем полученное уравнение, считая, что u_1 – это постоянная величина: $\dfrac{-1}{y-5z}=\dfrac{z^5}{u_1}+C$. Подставив теперь $u_1=\dfrac{z^5}{x}$, имеем решение $\dfrac{-1}{y-5z}=x+C \Rightarrow C=\dfrac{-1}{y-5z}-x$. Умножив на -1, находим первый интеграл $u_2 = x+\dfrac{1}{y-5z}$.

Второй способ построения u_2. Воспользуемся свойством равных дробей для нашей характеристической системы, т.е. формулой (5) при $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$.

$$\frac{dy-5\,dz}{x(y-5z)^2+z-z}=\frac{dx}{x},\qquad \frac{d(y-5\,z)}{x(y-5z)^2}=\frac{dx}{x},\qquad \frac{d(y-5\,z)}{(y-5z)^2}=dx,\qquad \frac{-1}{y-5z}=x+C.$$

Выражая из последнего равенства произвольную постоянную $-C$, находим

$$u_2 = x+\frac{1}{y-5z} \text{ – первый интеграл.}$$

Очевидно, u_1 и u_2 независимы, так как в u_2 входит y, а в u_1 не входит. Таким образом,

$$u = F\left(\frac{z^5}{x},\ x+\frac{1}{y-5z}\right) \text{ – общее решение уравнения.}$$

Решим задачу Коши с заданным начальным условием $u = xz^5$ при $y = 5z+1,\ x>0$. Используя уравнение поверхности $y = 5z+1$, представим

$$u_1 = \frac{z^5}{x}, \qquad u_2 = x+1 \;\Rightarrow\; x = u_2 - 1, \qquad \hat{u} = x\,z^5 = u_1\,x^2 = u_1\left(u_2-1\right)^2.$$

Вне поверхности $y = 5z+1$ продолжим $\hat{u}$ по той же формуле, подставляя исходные значения первых интегралов

$$\hat{u} = \frac{z^5}{x}\left(x + \frac{1}{y-5z} - 1\right)^2 \quad \text{– решение задачи Коши.}$$

Замечание 1. При решении задачи Коши мы могли бы выразить через u_1 и u_2 все три независимые переменные $x = u_2 - 1$, $z = \sqrt[5]{u_1(u_2-1)}$, $y = 5\sqrt[5]{u_1(u_2-1)} + 1$ на рассматриваемой поверхности, но этого не потребовалось.

Замечание 2. В этой задаче мы нашли первый интеграл $u_1 = z^5 / x$, но можно перевернуть дробь и рассмотреть первый интеграл $\hat{u}_1 = x / z^5$. Вообще, первые интегралы определяются с точностью до функциональной зависимости. Какая запись является предпочтительной? Здесь полезно принять во внимание постановку задачи Коши. В нашем случае начальные данные задаются на части плоскости, где $x > 0$, а z может обращаться в нуль. Поэтому первая запись более корректна.

Задача 42-8. Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$\left(2xy^2 - 7xz^3\right)\frac{\partial u}{\partial x} + yz^3\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2y^2 z\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u = xy^6 \text{ при } z = 1,\; y > 0.$$

Решение. Запишем характеристическую систему

$$\frac{dx}{2xy^2 - 7xz^3} = \frac{dy}{yz^3} = \frac{dz}{-2y^2 z}.$$

Рассмотрев вторую и третью дроби, получаем уравнение, которое содержит только две независимые переменные

$\dfrac{dy}{yz^3} = -\dfrac{dz}{2y^2 z} \;\Rightarrow\; 2y\,dy = -z^2 dz$, отсюда $3y^2 = -z^3 + C$. Выражая постоянную C, находим $u_1 = 3y^2 + z^3$ – первый интеграл.

Рассмотрим два способа для отыскания ещё одного первого интеграла.

<u>Первый способ построения</u> u_2. Из равенства $u_1 = 3y^2 + z^3$ выразим $z^3 = u_1 - 3y^2$, эту формулу будем использовать для решения уравнения

$$\frac{dx}{2xy^2 - 7xz^3} = \frac{dy}{yz^3},$$

которое предварительно преобразуем к виду

$$\frac{dx}{x} = \frac{2y^2 - 7z^3}{yz^3}\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{2y}{z^3} - \frac{7}{y}\right)dy.$$

Подставляя $z^3 = u_1 - 3y^2$, имеем

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{2y}{u_1 - 3y^2} - \frac{7}{y}\right)dy.$$

Решаем полученное уравнение, считая, что u_1 – это постоянная величина.

$\ln|x| = -\dfrac{1}{3}\ln\left|u_1 - 3y^2\right| - 7\ln|y| + \hat{C}$, т.е. $\ln|x| + \dfrac{1}{3}\ln\left|u_1 - 3y^2\right| + 7\ln|y| = \hat{C}, \quad x\sqrt[3]{u_1 - 3y^2}\, y^7 = C$.

Подставив в последнее равенство $u_1 = 3y^2 + z^3$, находим решение в виде $xy^7 z = C$. Следовательно, $u_2 = xy^7 z$ – первый интеграл.

<u>Второй способ построения</u> u_2. Воспользуемся свойством равных дробей для исходной характеристической системы, т.е. формулой (5) при $k_1 = z, k_2 = 0, k_3 = x$.

$$\frac{z\,dx + x\,dz}{2xy^2z - 7xz^4 - 2xy^2z} = \frac{dy}{yz^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{z\,dx + x\,dz}{-7xz^4} = \frac{dy}{yz^3}, \qquad \frac{d(xz)}{xz} = -7\frac{dy}{y}.$$

Решение последнего уравнения легко найти.

$$\ln|xz| = -7\ln|y| + \tilde{C} \quad \Rightarrow \quad xz = \frac{C}{y^7}, \quad xy^7z = C.$$

Получаем первый интеграл $u_2 = xy^7z$.

Очевидно, u_1 и u_2 независимы, так как в u_2 входит x, а в u_1 не входит. Таким образом,

$$u = F\left(3y^2 + z^3,\, xy^7z\right) \text{ – общее решение уравнения.}$$

Решим задачу Коши с заданным начальным условием $u = xy^6$ при $z = 1,\ y > 0$. Используя уравнение поверхности $z = 1, y > 0$, представим

$$u_1 = 3y^2 + 1 \ \Rightarrow \ y = \sqrt{\frac{u_1 - 1}{3}}, \qquad u_2 = xy^7, \qquad \hat{u} = xy^6 = \frac{u_2}{y} = \sqrt{\frac{3}{u_1 - 1}}\ u_2.$$

Вне поверхности $z = 1, y > 0$ продолжим $\hat{u}$ по той же формуле, подставляя исходные значения первых интегралов

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{3}\,xy^7z}{\sqrt{3y^2 + z^3 - 1}} \text{ – решение задачи Коши.}$$

9. Задачи повышенного уровня

Задача 41-9. Доказать, что при всех $A, B, C \in \mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно $(x+1)y''' - y'\sin x = 0,\quad 0 \le x \le 1,\qquad y(0) - 3y'(0) = A,\quad y(1) = B,\quad y'(1) = C.$

Доказательство. Существование. Обозначим $z(x) = y'(x)$, $q(x) = -\dfrac{\sin x}{x+1} \le 0$ на $[0,1]$.

Учитывая равенство $y(x) = y(1) - \int_x^1 y'(t)\,dt$, для $z(x)$ получаем задачу

$$z'' + q(x)z = 0,\ \ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$B - \int_0^1 z(t)\,dt - 3z(0) = A, \qquad z(1) = C. \tag{2}$$

Пусть $z_1(x)$ и $z_2(x)$ есть решения двух задач Коши

$$\begin{cases} z_1'' + q(x)z_1 = 0, \\ z_1(0) = 0,\ \ z_1'(0) = 1, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} z_2'' + q(x)z_2 = 0, \\ z_2(1) = 0,\ \ z_2'(1) = -1. \end{cases}$$

Из теоремы Штурма следует, что $z_1(x) > 0$ на $(0,1]$ и $z_2(x) > 0$ на $[0,1)$. Будем искать решение (1) в виде

$$z(x) = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x), \tag{3}$$

тогда граничные условия (2) принимают вид

$$B - C_1 \int_0^1 z_1(t)\,dt - C_2\left[\int_0^1 z_2(t)\,dt + 3z_2(0)\right] = A, \qquad C_1 z_1(1) = C.$$

Отсюда находим

$$C_1 = \frac{C}{z_1(1)}, \qquad\qquad C_2 = \frac{B - A - C\int_0^1 z_1(t)\,dt \,/\, z_1(1)}{\int_0^1 z_2(t)\,dt + 3z_2(0)}.$$

Подставив эти значения в (3), получаем решение (1)-(2), а затем и решение исходной краевой задачи.

Единственность. $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[0,1]$. Действительно, пусть $c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$. Полагая $x = 0$ и $x = 1$, получаем $c_2 z_2(0) = c_1 z_1(1) = 0$ $\Rightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$. Функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), поэтому $z(x) = y'(x)$ всегда представляется в виде (3). Константы C_1 и C_2 находятся из краевых условий единственным образом, следовательно, решение единственно.

2 способ доказательства единственности. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ какие-либо решения рассматриваемой краевой задачи. Их разность $u = y_1 - y_2$ удовлетворяет соотношениям

$$u''' + q(x)u' = 0,\quad 0 \le x \le 1,\quad u(0) - 3u'(0) = 0,\quad u(1) = u'(1) = 0 \quad\Rightarrow\quad u(x) = -\int_x^1 u'(t)\ dt.$$

Для производной $v(x) = u'(x)$ имеем задачу

$$v'' + q(x)v = 0 \text{ на } [0,1],\quad \int_0^1 v(x)\,dx + 3v(0) = 0,\quad v(1) = 0.$$

Из теоремы Штурма вытекает, что нетривиальное решение $v(x)$ не меняет знака на $[0,1)$, величины $\int_0^1 v(x)\,dx$ и $v(0)$ либо обе положительные, либо обе отрицательные. Равенство

$\int_0^1 v(x)\,dx + 3v(0) = 0$ возможно только в случае тривиального решения $v(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, тогда и $u(x) \equiv 0$.

Задача 42-9. Доказать, что при всех $A, B, C \in \mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно $xy''' - y'\cos^2 x = 0, \quad 2 \le x \le 3, \qquad y(2) = A, \quad y'(2) = B, \quad y(3) + y'(3) = C.$

Доказательство. Существование. Обозначим $z(x) = y'(x)$, $q(x) = -\dfrac{\cos^2 x}{x} < 0$ на $[2,3]$.

Учитывая равенство $y(x) = y(2) + \int_2^x y'(t)\,dt$, для $z(x)$ получаем задачу

$$z'' + q(x)z = 0, \ \ 2 \le x \le 3, \tag{4}$$

$$z(2) = B, \qquad A + \int_2^3 z(t)\,dt + z(3) = C. \tag{5}$$

Пусть $z_1(x)$ и $z_2(x)$ есть решения двух задач Коши

$$\begin{cases} z_1'' + q(x)z_1 = 0, \\ z_1(2) = 0, \ \ z_1'(2) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2'' + q(x)z_2 = 0, \\ z_2(3) = 0, \ \ z_2'(3) = -1. \end{cases}$$

Из теоремы Штурма следует, что $z_1(x) > 0$ на $(2,3]$ и $z_2(x) > 0$ на $[2,3)$. Будем искать решение (4) в виде

$$z(x) = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x), \tag{6}$$

тогда граничные условия (5) принимают вид

$$C_2 z_2(2) = B, \qquad A + C_1\left[\int_2^3 z_1(t)\,dt + z_1(3)\right] + C_2\int_2^3 z_2(t)\,dt = C.$$

Отсюда находим

$$C_2 = \frac{B}{z_2(2)}, \qquad C_1 = \frac{C - A - B\int_2^3 z_2(t)\,dt \,/\, z_2(2)}{\int_2^3 z_1(t)\,dt + z_1(3)}.$$

Подставив эти значения в (6), получаем решение (4)-(5), а затем и решение исходной краевой задачи.

Единственность. $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[2,3]$. Действительно, пусть $c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) = 0$ при всех $x \in [2,3]$. Полагая $x = 2$ и $x = 3$, получаем $c_2 z_2(2) = c_1 z_1(3) = 0$ $\Rightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$. Функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4), поэтому $z(x) = y'(x)$ всегда представляется в виде (6). Константы C_1 и C_2 находятся из краевых условий единственным образом, следовательно, решение единственно.

2 способ доказательства единственности. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ какие-либо решения рассматриваемой краевой задачи. Их разность $u = y_1 - y_2$ удовлетворяет соотношениям

$$u''' + q(x)u' = 0, \quad 2 \le x \le 3, \quad u(2) = u'(2) = 0, \quad u(3) + u'(3) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(x) = \int_2^x u'(t)\,dt.$$

Для производной $v(x) = u'(x)$ имеем задачу

$$v'' + q(x)v = 0 \ \text{ на } \ [2,3], \quad v(2) = 0, \quad \int_2^3 v(x)\,dx + v(3) = 0.$$

Из теоремы Штурма вытекает, что нетривиальное решение $v(x)$ не меняет знака на $(2,3]$, величины $\int_2^3 v(x)\,dx$ и $v(3)$ либо обе положительные, либо обе отрицательные. Равенство $\int_2^3 v(x)\,dx + v(3) = 0$ возможно только в случае тривиального решения $v(x) \equiv 0$ на $[2,3]$, тогда и $u(x) \equiv 0$.

Задача 41-10. Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x} = u\,,\quad \dot{r} = v\,,\quad \dot{u} = v - 2x\,,\quad \dot{v} = -u - 1 + \frac{w(w+1)}{r+3w^2}\,,\quad \dot{w} = -\frac{v(w+1)}{r+3w^2}\,.$$

Решение. Будем искать первый интеграл типа энергии. Из рассматриваемой системы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^2+v^2+w^2\right) = u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w} = u(v-2x) + v\left[-u - 1 + \frac{w(w+1)}{r+3w^2}\right] - \frac{vw(w+1)}{r+3w^2} = -2ux - v = -2\dot{x}x - \dot{r}.$$

Таким образом,

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u^2+v^2+w^2}{2} + x^2 + r\right) = 0$, первый интеграл имеет вид $C_1 = \dfrac{u^2+v^2+w^2}{2} + x^2 + r$.

Из второго и пятого уравнений системы находим

$$\dot{w} = -\frac{\dot{r}(w+1)}{r+3w^2},\quad \left(r+3w^2\right)\dot{w} + (w+1)\dot{r} = 0,\quad \frac{d}{dt}\left[w^3 + (w+1)r\right] = 0.$$

Отсюда получаем первый интеграл $C_2 = w^3 + (w+1)r$.

Задача 42-10. Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x} = u\,,\quad \dot{r} = v\,,\quad \dot{u} = -r\,,\quad \dot{v} = -x + w\left(\frac{w+1}{r} + 2\right),\quad \dot{w} = -v\left(\frac{w+1}{r} + 2\right).$$

Решение. Будем искать первый интеграл типа энергии. Из рассматриваемой системы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^2+v^2+w^2\right) = u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w} = -ur + v\left[-x + w\left(\frac{w+1}{r} + 2\right)\right] - vw\left(\frac{w+1}{r} + 2\right) = -ur - vx = -\dot{x}r - \dot{r}x.$$

Таким образом,

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u^2+v^2+w^2}{2} + rx\right) = 0$, первый интеграл имеет вид $C_1 = \dfrac{u^2+v^2+w^2}{2} + rx$.

Из второго и пятого уравнений системы находим

$$\dot{w} = -\dot{r}\left(\frac{w+1}{r} + 2\right),\quad r\dot{w} + (w+1)\dot{r} + 2r\dot{r} = 0,\quad \frac{d}{dt}\left[(w+1)r + r^2\right] = 0.$$

Отсюда получаем первый интеграл $C_2 = (w+1)r + r^2$.

ОТВЕТЫ ВАРИАНТ 41

1.(5) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x} - \frac{5}{9} - \frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} e^{-x}$.

2.(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.(4) Положения равновесия: $M_1(1;-1)$, $M_2(-1;3)$.

1) В M_1: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, седло.

2) В M_2: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, устойчивый фокус, против часовой стрелки.

4.(5) $y = C_1(x+2) + C_2(x+2)\ln x + \frac{1}{4}(x+2)\ln^5 x$.

5.(5) $\left(y' \operatorname{tg} x\right)' = 0,\ \ y = C\ln\left|\sin x\right| + C_1,\ \ \hat{y} = 2\ln\left(-\sin x\right),\ \Delta J = \int\limits_{7\pi/4}^{11\pi/6} \left(h'\right)^2 \operatorname{tg} x\, dx \le 0$, max.

6.(5) $y' = z(x)y$, $(x^2 - 2x)z' + (3x-4)z - x(x-2)^2 z^2 = 0$, $z = \frac{1}{x(1+C_1x)(x-2)}, C_1 = 0$,

$y = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

7.(5) $y = C - \frac{3}{4}\left(x + C\right)^{4/3}$, $y_o = \frac{1}{4} - x$.

8.(5) $u = F\left(\frac{z^5}{x}, x + \frac{1}{y-5z}\right)$, $\hat{u} = \frac{z^5}{x}\left(x + \frac{1}{y-5z} - 1\right)^2$.

10.(5) $C_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + x^2 + r;\ C_2 = wr + w^3 + r.$

ОТВЕТЫ ВАРИАНТ 42

1.(5) $y = C_1 + C_2 x + \left(C_3 \sin x + C_4 \cos x\right) e^x + \dfrac{3}{2} x^4 + 6x^3 + 9x^2 + \left(24 - 12x\right) e^x + \dfrac{1}{8} e^{2x}$.

2.(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ 3\cos 2t - 4\sin 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 3\sin 2t + 4\cos 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$.

3.(4) Положения равновесия: $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$.

1) В M_1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -5$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, седло.

2) В M_2: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -5$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, устойчивый узел, касание к h_1.

4.(5) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} \ln x + e^{4x}(2\ln^2 x - x)$.

5.(5) $\left(y' \sin x\right)' = 0,\ \ y = C \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C_1$, $\hat{y} = \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$, $\Delta J = \int\limits_{4\pi/3}^{3\pi/2} \left(h'\right)^2 \sin x\, dx \le 0$, max.

6.(5) $y' = p(y)$, $2\left(y+2\right) p' + \left(2y-1\right) p^3 = p$, $p = \sqrt{\dfrac{y+2}{y^2 - y + C_1}}$, $C_1 = -6$,

$y = \left(\dfrac{3x+1}{2}\right)^{2/3} + 3$.

7.(5) $y = C - 2e^{(C-x)/2}$, $y_o = x - 2$.

8.(5) $u = F\left(3y^2 + z^3, xy^7 z\right)$, $\hat{u} = \dfrac{\sqrt{3}\, xy^7 z}{\sqrt{3y^2 + z^3 - 1}}$.

10.(5) $C_1 = \dfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + rx;\ C_2 = wr + r^2 + r.$

ОТВЕТЫ ВАРИАНТ 43

1.(5) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20} x \cos 2x - \frac{1}{3} e^{2x}$.

2.(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$.

3.(4) Положения равновесия: $M_1(2;-4)$, $M_2(-2;12)$.

1) В M_1: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, седло.

2) В M_2: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$, неустойчивый фокус, по часовой стрелке.

4.(5) $y = C_1(x-1) + C_2(x-1)\ln x - (x-1)\ln(\ln x)$.

5.(5) $(y'\text{ctg}x)' = 0$, $y = C\ln|\cos x| + C_1$, $\hat{y} = 2\ln(-2\cos x)$, $\Delta J = \int\limits_{2\pi/3}^{5\pi/6} (h')^2 \,\text{ctg}\, x\, dx \le 0$, max.

6.(5) $y' = z(x)y$, $(x^3 + 3x)z' - 3(x^2+1)z + 2xz^2 = 0$, $z = \frac{x(x^2+3)}{x^2 + C_1}$, $C_1 = 0$,

$y = x^3 \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

7.(5) $y = \frac{5}{6}(x - C)^{6/5} + C$, $y_o = x - \frac{1}{6}$.

8.(5) $u = F\left(\frac{1}{x} + \text{arctg}\, z, (x-y)(z^2+1)\right)$, $\hat{u} = \frac{2x}{1 + x\,\text{arctg}\, z} + (y-x)(z^2+1)$.

10.(5) $C_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + x + r^2$; $C_2 = wr^2 + r$.

ОТВЕТЫ ВАРИАНТ 44

1.(5) $y = C_1 + C_2 x + \left(C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x\right)e^{-x} + \frac{5}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \left(15x + 30\right)e^{-x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$

2.(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -3\cos t - \sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$

3.(4) Положения равновесия: $M_1(0;1)$, $M_2(-2;0)$.

1) В M_1: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, неустойчивый узел, касание к h_1.

2) В M_2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{5}$, устойчивый фокус, по часовой стрелке.

4.(5) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x+1) + \frac{1}{3}x^2 \ln^3(x+1)$.

5.(5) $\left(y' \cos x\right)' = 0,\ \ y = C\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C_1,\ \ \hat{y} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right),$

$\Delta J = \int\limits_{11\pi/6}^{2\pi} \left(h'\right)^2 \cos x\, dx \ge 0$, min.

6.(5) $y' = p(y)$, $2\left(y^2 + y\right)p' + p + \left(y^2 - 8\right)p^3 = 0$, $p = \sqrt{\frac{y+1}{y^2 + 8 + C_1 y}}$, $C_1 = 9$,

$y = \left(\frac{3x}{2} + 12\right)^{2/3} - 8$.

7.(5) $y = C - \ln(C - x)$, $y_o = x + 1$.

8.(5) $u = F\left(e^{-x} + y^2,\ e^{2x}yz\right)$, $\ \hat{u} = e^{2x}yz\frac{(e^{-x} + y^2)^2}{4}$.

10.(5) $C_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + rx^2;\ C_2 = w(r^3 + 1).$